PROCESSI DI POISSON

Corso di Tecniche di Simulazione, a.a. 2005/2006

Francesca Mazzia

Dipartimento di Matematica
Università di Bari

17 Aprile 2006

Processi di Poisson

- Consideriamo eventi casuali come gli arrivi di lavori in una officina che lavora su commissione, oppure gli arrivi degli aerei su una pista, oppure gli arrivi delle navi in un porto.
- Questi eventi possono essere descritti da una funzione $N(t)$ definita per ogni $t \geq 0$.
- $N(t)$ rappresenta il numero di eventi che si verificano nel tempo $[0, t]$
- Il tempo 0 è il tempo di inizio dell'osservazione, anche se in quel momento non vi è nessun arrivo.
- I valori che $N(t)$ può assumere sono interi

Processi di Poisson

- Il processo di contare gli eventi $N(t), t \geq 0$ si chiama processo di Poisson con tasso medio λ se:

1. Gli arrivi si presentano uno alla volta.
2. La distribuzione dei numeri di arrivi fra t e $t + s$ dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo s e non dal punto iniziale t.
3. Il numero di arrivi in periodi di tempo indipendenti sono variabili aleatorie indipendenti. Quindi un grande numero di arrivi in un intervallo di tempo, non condiziona il numero di arrivi nell'intervallo successivo.

Processi di Poisson

- Se gli arrivi si verificano secondo un processo di Poisson, allora la probabilità che $N(t)$ sia uguale a n è data da:

$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0, n = 0, 1, 2, ...$$

- $N(t)$ ha una distribuzione di Poisson con parametro $\alpha = \lambda t$
- $E(N(t)) = \alpha = \lambda t = V(N(t))$

Processi di Poisson

- Dati s e t con $s < t$, l'assunzione 2 implica che la variabile aleatoria $N(t) - N(s)$ rappresentante il numero di arrivi nell'intervallo $[s, t]$ è distribuita secondo una distribuzione di Poisson con media $\lambda(t - s)$.

Processi di Poisson

- Consideriamo i tempi in cui si verificano gli arrivi. Sia A_1 il tempo del primo arrivo, $A_1 + A_2$ il tempo del secondo e così via.
- Allora $A_1, A_2, ..$ sono i tempi di interarrivo.
- Il primo arrivo si verifica al tempo A_1, quindi

$$(A_1 > t) = (N(t) = 0)$$

e

$$P(A_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Processi di Poisson

- La probabilità che il primo arrivo si verifiche in $[0, t]$ è data da:

$$P(A_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

  questa è la cdf di una distribuzione esponenziale con parametro λ
- Quindi A_1 è distribuita esponenzialmente con media $E(A_1) = 1/\lambda$

Processi di Poisson

- Si può dimostrare che tutti i tempi di interarrivo A_1, A_2, ..., sono distribuiti esponenzialmente e indipendentemente con media $1/\lambda$
- Una definiziaone alternativa di un processo di Poisson è che se i tempi di interarrivo sono distributi esponenzialmente e indipendentemente, allora il numero di arrivi fino al tempo t, $N(t)$, definiscono un processo di Poisson

Esempio

I lavori in una industria di costruzione di macchine arrivano secondo un processo di Poisson, con media $\lambda = 2$ per ora. I tempi di interarrivo sono distribuiti esponenzialmente con media $E(A) = 1/\lambda = 1/2$ ore.

Processi di Poisson

- Considera un processo di Poisson con tasso medio λ.
- Supponiamo che ogni volta che un evento si verifica è classificato come di tipo I con probabilità p o di tipo II con probabilità $(1-p)$, indipendentemente dagli altri eventi.
- $N_1(t)$ e $N_2(t)$ sono variabili aleatorie che denotano rispettivamente il numero di eventi di tipo I e di tipo II che si verificano in $[0, t]$.
- $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.
- Si dimostra che $N_1(t)$ e $N_2(t)$ sono processi di Poisson con tasso medio λp e $\lambda(1-p)$.
- I due processi sono indipendenti

Esempio - Random splitting

- Supponiamo che i lavori arrivino all'industria con un processo di Poisson con tasso λ. Supponiamo inoltre che ogni arrivo è differenziato dalla caratteristica alta priorità, con probabilità $1/3$, oppure bassa priorità, con probabilità $2/3$.
- Allora $N_1(t)$ avrà tasso $\lambda/3$ e $N_2(t)$ avrà tasso $2\lambda/3$

Processi di Poisson

- Una situazione opposta è l'unione di due flussi di arrivo.
- Se $N_1(t)$ e $N_2(t)$ sono due processi di Poisson indipendenti allora $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ è un processo di Poisson con tasso $\lambda_1 + \lambda_2$.