TECNICHE DI SIMULAZIONE
MODELLI STATISTICI, RICHIAMI

Francesca Mazzia

Dipartimento di Matematica
Università di Bari

a.a. 2004/2005

Modelli statistici nella simulazione

- Nel modellare fenomeni del mondo reale vi sono poche situazioni in cui le azioni delle entità nel sistema oggetto di studio sono perfettamente conosciute in anticipo;

Modelli statistici nella simulazione

- Nel modellare fenomeni del mondo reale vi sono poche situazioni in cui le azioni delle entità nel sistema oggetto di studio sono perfettamente conosciute in anticipo;
- Il mondo visto da chi costruisce il modello è probabilistico;

Modelli statistici nella simulazione

- Nel modellare fenomeni del mondo reale vi sono poche situazioni in cui le azioni delle entità nel sistema oggetto di studio sono perfettamente conosciute in anticipo;
- Il mondo visto da chi costruisce il modello è probabilistico;
- Un modello appropriato può essere sviluppato campionando il fenomeno di interesse;

Variabili casuali discrete

- Sia X una variabile casuale. Se il numero di valori possibili di X è finito, o infinito ma contabile, X è chiamata variabile casuale discreta. I valori possibili di X sono indicati con $x_1, x_2, ...$

Variabili casuali discrete

- Sia X una variabile casuale. Se il numero di valori possibili di X è finito, o infinito ma contabile, X è chiamata variabile casuale discreta. I valori possibili di X sono indicati con $x_1, x_2, ...$
- Esempio: Si osserva il numero di lavori che arriva in una officina che lavora su commissione. La variabile casuale di interesse è X dove:
  $X =$ numero di lavori che arriva in una settimana.

Variabili casuali discrete

- Sia X una variabile casuale. Se il numero di valori possibili di X è finito, o infinito ma contabile, X è chiamata variabile casuale discreta. I valori possibili di X sono indicati con $x_1, x_2, ...$
- Esempio: Si osserva il numero di lavori che arriva in una officina che lavora su commissione. La variabile casuale di interesse è X dove:
  $X =$ numero di lavori che arriva in una settimana.
- I valori possibili di X appartengono allo spazio di definizione di X denotato con $R_X = \{0, 1, 2, ...\}$.

Variabili casuali discrete

- Sia X una variabile casuale. Se il numero di valori possibili di X è finito, o infinito ma contabile, X è chiamata variabile casuale discreta. I valori possibili di X sono indicati con $x_1, x_2, ...$
- Esempio: Si osserva il numero di lavori che arriva in una officina che lavora su commissione. La variabile casuale di interesse è X dove:
  $X =$ numero di lavori che arriva in una settimana.
- I valori possibili di X appartengono allo spazio di definizione di X denotato con $R_X = \{0, 1, 2, ...\}$.
- X è una variabile casuale discreta.

Variabili casuali discrete

- Sia X una variabile casuale. Se il numero di valori possibili di X è finito, o infinito ma contabile, X è chiamata variabile casuale discreta. I valori possibili di X sono indicati con $x_1, x_2, ...$
- Esempio: Si osserva il numero di lavori che arriva in una officina che lavora su commissione. La variabile casuale di interesse è X dove:
  $X =$ numero di lavori che arriva in una settimana.
- I valori possibili di X appartengono allo spazio di definizione di X denotato con $R_X = \{0, 1, 2, ...\}$.
- X è una variabile casuale discreta.
- Il numero $p(x_i) = P(x = x_i)$ dà la probabilità che la variabile abbia il valore uguale a x_i.

Variabili casuali discrete

- I numeri $p(x_i)$ devono soddisfare due condizioni:

Variabili casuali discrete

- I numeri $p(x_i)$ devono soddisfare due condizioni:
  - $p(x_i) \geq 0 \quad \forall i$.

Variabili casuali discrete

- I numeri $p(x_i)$ devono soddisfare due condizioni:
  - $p(x_i) \geq 0 \quad \forall i.$
  - $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.$

Variabili casuali discrete

- I numeri $p(x_i)$ devono soddisfare due condizioni:
  - $p(x_i) \geq 0 \quad \forall i$.
  - $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.
- Le coppie $(x_i, p(x_i)), i = 1, 2, ...$ sono chiamate distribuzione di probabilità di x_i.

Variabili casuali discrete

- I numeri $p(x_i)$ devono soddisfare due condizioni:
  - $p(x_i) \geq 0 \quad \forall i$.
  - $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.
- Le coppie $(x_i, p(x_i)), i = 1, 2, ...$ sono chiamate distribuzione di probabilità di x_i.
- $p(x_i)$ è chiamata funzione massa di probabilità (pmf).

Variabili casuali discrete

Esempio:

- Lanciamo un solo dado. Definiamo X il numero sulla faccia superiore del dado, allora $R_X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Variabili casuali discrete

Esempio:

- Lanciamo un solo dado. Definiamo X il numero sulla faccia superiore del dado, allora $R_X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- Supponiamo che il dado sia pesato in modo tale che la probabilità che una faccia sia su un lato sia proporzionale al numero di punti.

Variabili casuali discrete

Esempio:

- Lanciamo un solo dado. Definiamo X il numero sulla faccia superiore del dado, allora $R_X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- Supponiamo che il dado sia pesato in modo tale che la probabilità che una faccia sia su un lato sia proporzionale al numero di punti.
- La distribuzione di probabilità discreta per questo esperimento è data da:

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

Variabili casuali discrete

Esempio:

- Lanciamo un solo dado. Definiamo X il numero sulla faccia superiore del dado, allora $R_X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- Supponiamo che il dado sia pesato in modo tale che la probabilità che una faccia sia su un lato sia proporzionale al numero di punti.
- La distribuzione di probabilità discreta per questo esperimento è data da:

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

- $p(x_i) \geq 0, i = 1, ...6.$

Variabili casuali discrete

Esempio:

- Lanciamo un solo dado. Definiamo X il numero sulla faccia superiore del dado, allora $R_X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- Supponiamo che il dado sia pesato in modo tale che la probabilità che una faccia sia su un lato sia proporzionale al numero di punti.
- La distribuzione di probabilità discreta per questo esperimento è data da:

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

- $p(x_i) \geq 0, i = 1, ...6.$
- $\sum_{i=0}^{\infty} p(x_i) = 1.$

Variabili casuali continue

- Se R_X della variabile casuale X è un intervallo o un insieme di intervalli, X è chiamata variabile casuale continua.

Variabili casuali continue

- Se R_X della variabile casuale X è un intervallo o un insieme di intervalli, X è chiamata variabile casuale continua.
- La probabilità che X cada nell'intervallo $[a, b]$ è data da:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ è chiamata funzione densità di probabilità (pdf).

Variabili casuali continue

- Se R_X della variabile casuale X è un intervallo o un insieme di intervalli, X è chiamata variabile casuale continua.
- La probabilità che X cada nell'intervallo $[a, b]$ è data da:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

  $f(x)$ è chiamata funzione densità di probabilità (pdf).
- La pdf soddisfa le seguenti condizioni:

Variabili casuali continue

- Se R_X della variabile casuale X è un intervallo o un insieme di intervalli, X è chiamata variabile casuale continua.
- La probabilità che X cada nell'intervallo $[a, b]$ è data da:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

  $f(x)$ è chiamata funzione densità di probabilità (pdf).
- La pdf soddisfa le seguenti condizioni:
  - $f(x) \geq 0$ per ogni x in R_X.

Variabili casuali continue

- Se R_X della variabile casuale X è un intervallo o un insieme di intervalli, X è chiamata variabile casuale continua.
- La probabilità che X cada nell'intervallo $[a, b]$ è data da:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

  $f(x)$ è chiamata funzione densità di probabilità (pdf).
- La pdf soddisfa le seguenti condizioni:
  - $f(x) \geq 0$ per ogni x in R_X.
  - $\int_{R_X} f(x)dx = 1$.

Variabili casuali continue

- Se R_X della variabile casuale X è un intervallo o un insieme di intervalli, X è chiamata variabile casuale continua.
- La probabilità che X cada nell'intervallo $[a, b]$ è data da:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

  $f(x)$ è chiamata funzione densità di probabilità (pdf).
- La pdf soddisfa le seguenti condizioni:
  - $f(x) \geq 0$ per ogni x in R_X.
  - $\int_{R_X} f(x)dx = 1$.
  - $f(x) = 0$ se x non appartiene a R_X.

Variabili casuali continue

Esempio

- La vita di un dispositivo laser usato per ispezionare le crepe nelle ali di un aereo è data da X, una variabile casuale continua, cha assume valori per $x \geq 0$, La pdf è data, in anni, da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Variabili casuali continue

Esempio

- La vita di un dispositivo laser usato per ispezionare le crepe nelle ali di un aereo è data da X, una variabile casuale continua, cha assume valori per $x \geq 0$, La pdf è data, in anni, da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

- X ha una distribuzione esponenziale con media 2 anni.

Variabili casuali continue

Esempio

- La vita di un dispositivo laser usato per ispezionare le crepe nelle ali di un aereo è data da X, una variabile casuale continua, cha assume valori per $x \geq 0$, La pdf è data, in anni, da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2}, & x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

- X ha una distribuzione esponenziale con media 2 anni.
- $P(2 \leq X \leq 3) = 1/2 \int_2^3 e^{-x/2} dx = 0.145$

Funzione di distribuzione cumulativa

- La funzione di distribuzione cumulativa (cdf), denotata da $F(x)$, misura la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore minore o uguale a x, cioè $F(x) = P(X \leq x)$.

Funzione di distribuzione cumulativa

- La funzione di distribuzione cumulativa (cdf), denotata da $F(x)$, misura la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore minore o uguale a x, cioè $F(x) = P(X \leq x)$.
- Se X è discreta $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$

Funzione di distribuzione cumulativa

- La funzione di distribuzione cumulativa (cdf), denotata da $F(x)$, misura la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore minore o uguale a x, cioè $F(x) = P(X \leq x)$.
- Se X è discreta $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
- Se X è continua $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Funzione di distribuzione cumulativa

- La funzione di distribuzione cumulativa (cdf), denotata da $F(x)$, misura la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore minore o uguale a x, cioè $F(x) = P(X \leq x)$.
- Se X è discreta $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
- Se X è continua $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- F è una funzione non decrescente. Se $a < b$, allora $F(a) \leq F(b)$.

Funzione di distribuzione cumulativa

- La funzione di distribuzione cumulativa (cdf), denotata da $F(x)$, misura la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore minore o uguale a x, cioè $F(x) = P(X \leq x)$.
- Se X è discreta $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
- Se X è continua $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- F è una funzione non decrescente. Se $a < b$, allora $F(a) \leq F(b)$.
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Funzione di distribuzione cumulativa

- La funzione di distribuzione cumulativa (cdf), denotata da $F(x)$, misura la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore minore o uguale a x, cioè $F(x) = P(X \leq x)$.
- Se X è discreta $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
- Se X è continua $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- F è una funzione non decrescente. Se $a < b$, allora $F(a) \leq F(b)$.
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Funzione di distribuzione cumulativa

- La funzione di distribuzione cumulativa (cdf), denotata da $F(x)$, misura la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore minore o uguale a x, cioè $F(x) = P(X \leq x)$.
- Se X è discreta $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
- Se X è continua $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
- F è una funzione non decrescente. Se $a < b$, allora $F(a) \leq F(b)$.
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a), \quad a < b$.

Funzione di distribuzione cumulativa

Esempio:

- Nell'esperimento del lancio di un dado pesato la cdf è data da:

x	$(-\infty, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$	$[5, 6)$	$[6, \infty)$
$F(x)$	0	1/21	3/21	6/21	10/21	15/21	21/21

Funzione di distribuzione cumulativa

Esempio:

- Nell'esperimento del lancio di un dado pesato la cdf è data da:

x	$(-\infty, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$	$[5, 6)$	$[6, \infty)$
$F(x)$	0	1/21	3/21	6/21	10/21	15/21	21/21

- Se X è una variabile casuale discreta la cdf è una funzione a gradini. Ogni gradino è di altezza $p(x_i)$.

Funzione di distribuzione cumulativa

Esempio:

- Nell'esperimento del dispositivo laser:

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t/2}dt = 1 - e^{-t/2}.$$

Funzione di distribuzione cumulativa

Esempio:

- Nell'esperimento del dispositivo laser:

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t/2}dt = 1 - e^{-t/2}.$$

- $P(0 \leq x \leq 2) = F(2) - F(0) = 0.632.$

Funzione di distribuzione cumulativa

Esempio:

- Nell'esperimento del dispositivo laser:

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t/2}dt = 1 - e^{-t/2}.$$

- $P(0 \leq x \leq 2) = F(2) - F(0) = 0.632.$
- $P(2 \leq x \leq 3) = F(3) - F(2) = 0.145.$

Attesa

- Un concetto importante è quello di attesa di una variabile aleatoria.

Attesa

- Un concetto importante è quello di attesa di una variabile aleatoria.
- Se X è una variabile aleatoria il valore atteso di X denotato da $E(X)$ è definito da:

Attesa

- Un concetto importante è quello di attesa di una variabile aleatoria.
- Se X è una variabile aleatoria il valore atteso di X denotato da $E(X)$ è definito da:
  - $E(X) = \sum_i x_i p(x_i)$ se X è discreta.

Attesa

- Un concetto importante è quello di attesa di una variabile aleatoria.
- Se X è una variabile aleatoria il valore atteso di X denotato da $E(X)$ è definito da:
  - $E(X) = \sum_i x_i p(x_i)$ se X è discreta.
  - $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ se X è continua.

Attesa

- Un concetto importante è quello di attesa di una variabile aleatoria.
- Se X è una variabile aleatoria il valore atteso di X denotato da $E(X)$ è definito da:
  - $E(X) = \sum_i x_i p(x_i)$ se X è discreta.
  - $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ se X è continua.
- Il valore atteso $E(X)$ è spesso denotato come media, μ, o momento primo di X.

Momento $n - simo$

- La quantità $E(X^n), n \geq 1$ è chiamata momento $n - simo$ di X e si calcola:

Momento $n - simo$

- La quantità $E(X^n), n \geq 1$ è chiamata momento $n - simo$ di X e si calcola:
  - $E(X^n) = \sum_i x_i^n p(x_i)$ se X è discreta.

Momento $n - simo$

- La quantità $E(X^n), n \geq 1$ è chiamata momento $n - simo$ di X e si calcola:
  - $E(X^n) = \sum_i x_i^n p(x_i)$ se X è discreta.
  - $E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$ se X è continua.

Varianza

- La varianza di una variabile aleatoria, X, denotata da $V(X)$ o $var(X)$ o σ^2 è definita da:

Varianza

- La varianza di una variabile aleatoria, X, denotata da $V(X)$ o $var(X)$ o σ^2 è definita da:
  - $V(X) = E((X - E(X))^2)$.

Varianza

- La varianza di una variabile aleatoria, X, denotata da $V(X)$ o $var(X)$ o σ^2 è definita da:
  - $V(X) = E((X - E(X))^2)$.
  - $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Varianza

- La varianza di una variabile aleatoria, X, denotata da $V(X)$ o $var(X)$ o σ^2 è definita da:
  - $V(X) = E((X - E(X))^2)$.
  - $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- La media $E(X)$ è una misura della tendenza centrale di una variabile aleatoria.

Varianza

- La varianza di una variabile aleatoria, X, denotata da $V(X)$ o $var(X)$ o σ^2 è definita da:
  - $V(X) = E((X - E(X))^2)$.
  - $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- La media $E(X)$ è una misura della tendenza centrale di una variabile aleatoria.
- La varianza di X misura il valore atteso del quadrato della differenza fra la variabile casuale e la sua media.

Deviazione standard

- La varianza misura la variazione dei possibili valori di X intorno alla media.

Deviazione standard

- La varianza misura la variazione dei possibili valori di X intorno alla media.
- La deviazione standard σ, è definita dalla radice quadrata della varianza.

Deviazione standard

- La varianza misura la variazione dei possibili valori di X intorno alla media.
- La deviazione standard σ, è definita dalla radice quadrata della varianza.
- La media e la deviazione standard sono espresse nella stessa unità di misura.

Media e varianza

Esempi:

- Nell'esempio del dado
  $E(X) = 1(1/21)+2(2/21)+...+6(6/21) = 91/21 = 4.33$,
  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2.22$, $\sigma = 1.49$.

Media e varianza

Esempi:

- Nell'esempio del dado
  $E(X) = 1(1/21)+2(2/21)+...+6(6/21) = 91/21 = 4.33$,
  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2.22$, $\sigma = 1.49$.
- Nell'esempio del dispositivo laser:
  $E(X) = 1/2 \int_0^\infty xe^{-x/2}dx = 2$ anni, $V(X) = 4$ anni,
  $\sigma = 2$ anni.

Moda

- La moda è usato per descrivere alcuni modelli statistici nella simulazione.

Moda

- La moda è usato per descrivere alcuni modelli statistici nella simulazione.
- Nel caso discreto la moda è il valore della variabile casuale che si verifica più di frequente.

Moda

- La moda è usato per descrivere alcuni modelli statistici nella simulazione.
- Nel caso discreto la moda è il valore della variabile casuale che si verifica più di frequente.
- Nel caso continuo è il punto in cui la pdf assume il valore massimo.

Moda

- La moda è usato per descrivere alcuni modelli statistici nella simulazione.
- Nel caso discreto la moda è il valore della variabile casuale che si verifica più di frequente.
- Nel caso continuo è il punto in cui la pdf assume il valore massimo.
- La moda può non essere unica. Se il valore modale si verifica in due punti diversi allora la distribuzione si dice bimodale.