ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO DA SVOLGERE IN R

a.a. 2009/2010 appelli Settembre 2010

1. L'approssimazione di Stirling:

$$S_n = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$$

si usa per approssimare $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ per n grande, nella formula $e = exp(1) = 2.7182818....$ Scrivere un programma che calcola e visualizza $n!$ e S_n, l'errore relativo e l'errore assoluto per $1 \leq n \leq 20$. Spiegare i risultati.

2. Costruire la matrice A di dimensione n con elementi:

$a_{ij} = sqrt(2/(n+1)) * sin(i * j * \pi/(n+1))$;

Al variare di $n = 8, 16, 32, 64, 128$:

1. Generare la matrice A;

2. Calcolare il numero di condizione della matrice in norma infinito;

3. Calcolare la fattorizzazione LU con pivot parziale e calcolare il numero di condizione delle matrici L e U;

4. Risolvere, usando la fattorizzazione LU con pivot parziale, il sistema lineare che si ottiene supponendo che la soluzione esatta sia il vettore $xt = (1,\ 1, \ldots\ 1)$;

5. Calcolare una maggiorazione dell'errore relativo e l'errore relativo vero in norma infinito;

6. Calcolare la fattorizzazione LU con pivot totale e calcolare il condizionamento delle matrici L e U;

7. Risolvere, usando la fattorizzazione LU con pivot totale, il sistema lineare che si ottiene supponendo che la soluzione esatta sia il vettore $xt = (1,\ 1, \ldots\ 1)$; (usare le istrauzioni R max.col e which.max per calcolare il massimo elemento della matrice);

8. Giustificare i risultati presentandoli in forma tabellare.

3. Data la seguente funzione:

   $f(x) := \frac{3x-4}{(x^2-9)(5x^2-8x+4)}$ per $x \in [-1, 1]$

   Verificare numericamente se il polinomio interpolante converge alla funzione data all'aumentare del numero di nodi costruendo il polinomio interpolante utilizzando n=10,20,40,80 nodi equidistanti e calcolando il massimo errore assoluto valutando la differenza fra $f(x)$ e $p(x)$ in 500 punti equidistanti. Memorizzare l'errore massimo calcolato in funzione di n e fare il grafico dell'errore. Confrontare fra di loro i vari metodi per calcolare il polinomio interpolante utilizzando tutte le basi studiate.

   Confrontare i risultati ottenuti con quelli che si ottengono utilizzando i nodi di Chebyschev. Come cambia la funzione di Lebesgue se si utilizzano i nodi di Chebyshev?

   Confrontare i risultati ottenuti con quelli che si ottengono con la spline lineare e la spline cubica interpolante gli stessi nodi. Fare il confronto scrivendo in una opportuna tabella i risultati ottenuti.

4. Applica il metodo dei trapezi e il metodo di Simpson composti per calcolare

   $$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 exp(-x^2)dx.$$

   Confronta i risultati riportando in tabella per
   $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$
   i valori dell'integrale approssimato, di una approssimazione dell'errore assoluto EA_n, calcolata utilizzando una stima dell'errore, il rapporto fra le approssimazioni degli errori EA_n/EA_{2n}, e il logaritmo in base due (utilizzando la function log2) del rapporto fra gli errori EA_n/EA_{2n}. Giustificare i risultati. Confrontare i risultati con quelli ottenuti con l'algoritmo adattativo.

5. Data la funzione $f(x) = x + log(x)$,

   (a) stampare un grafico nell'intervallo $[0.1, 1]$;

   (b) verificare, utilizzando il grafico, che la funzione ha una radice fra 0.5 e 06;

   (c) Applicare il metodo delle bisezioni per trovare la radice usando come intervallo $[0.5, 0.6]$ e spiegare perche' questa scelta e' valida;

(d) Applicare il metodo di Newton per trovare la radice usando come punto iniziale $x_0 = 0.5$;

(e) Applicare il metodo delle secanti usando $x_0 = 0.5$ e $x_1 = 0.6$;

(f) Applicare l'algoritmo di Brent usando $x_0 = 0.5$ e $x_1 = 0.6$;

(g) Usare come tolleranza di input 10^{-10}

(h) Stampare le iterate e spiegare la convergenza usando i risultati della teoria.