Interpolazione

Corso di Calcolo Numerico, a.a. 2008/2009

Francesca Mazzia

Dipartimento di Matematica
Università di Bari

17 Aprile 2009

Interpolazione

Problema dell'Interpolazione dati i punti $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_n, f_n)$ *trovare una curva continua che passi per essi.*

Interpolazione polinomiale : dati i punti $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_n, f_n)$ *trovare un polinomio di grado* n *tale che* $p(x_i) = f_i$*, per* $i = 0, 1, \cdots, n$

Polinomi

Sia P_n l'insieme di tutti i polinomi di grado minore od uguale ad n, n un numero positivo.
Questo insieme può essere generato dai polinomi elementari $1, x, x^2, \ldots, x^n$:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} p_j x^j.$$

Al variare dei coefficienti p_j si ottengono tutti i polinomi dell'insieme.
Le funzioni $1, x, x^2, \ldots, x^n$ sono linearmente indipendenti.
Infatti il polinomio identicamente nullo si può ottenere solo prendendo tutti i coefficienti $p_j = 0$.
L'insieme di polinomi elementari $\{x^i\}_{i=0}^n$, forma una base di P_n, detta base delle potenze.

Siano (x_i, f_i), per $i = 0, 1, 2, \dots, n$ delle coppie di punti nel piano cartesiano.
Supponiamo che i punti x_i, detti nodi, siano distinti, $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$.
Vogliamo determinare un polinomio $p(x) \in P_n$ tale che

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} p_j x_0^j &= f_0 \\ \sum_{j=0}^{n} p_j x_1^j &= f_1 \\ &\vdots \\ \sum_{j=0}^{n} p_j x_n^j &= f_n \end{aligned}$$

È questo il problema dell' interpolazione dei dati (x_i, f_i) mediante un polinomio, detto polinomio interpolante.

Introduciamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix};$$

il problema si pone nella forma:

$$A \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

e si riduce a risolvere un sistema lineare di dimensioni $n+1$.

La matrice A, detta matrice di Vandermonde è non singolare essendo:

$$det(A) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

Quindi il sistema precedente ammette una unica soluzione e ciò permette di ricavare il polinomio interpolante.
La matrice di Vandermonde è spesso mal condizionata e, nel caso in cui i dati da interpolare siano molti, la soluzione del sistema precedente risulta molto costosa.
Il problema dell'interpolazione può essere risolto più efficientemente usando altre basi di P_n.

Se le quantità f_i sono i valori assunti da un polinomio $f \in P_n$ nei punti x_i, allora il polinomio $p(x)$ coincide con $f(x)$.
$d(x) = f(x) - p(x)$ è un polinomio di P_n il quale si annulla negli $n+1$ punti $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
Ma un polinomio di grado minore o uguale ad n non può avere più di n radici a meno che non sia il polinomio nullo in tutti i punti, e quindi $d(x) = f(x) - p(x) \equiv 0$.
Questo dimostra l'unicità del polinomio interpolante.

Interpolazione di Lagrange

Consideriamo i polinomi, tutti di grado n:

$$l_j(x) = \frac{\displaystyle\prod_{i=0, i\neq j}^{n} (x - x_i)}{\displaystyle\prod_{i=0, i\neq j}^{n} (x_j - x_i)} \qquad \text{per } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Essi godono delle seguenti proprietà:

1) Per $j, k = 0, 1, \ldots, n$ risulta

$$l_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{per } j = k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2) Sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di P_n. Infatti da

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i l_i(x) = 0$$

si ha, per $k = 0, 1, \ldots, n$

Base di Lagrange

L'insieme $\{l_i(x)\}_{i=0}^n$ è detta base di Lagrange. Imponendo le condizioni di interpolazione si ha

$$\sum_{j=0}^{n} p_j l_j(x_0) = f_0$$
$$\sum_{j=0}^{n} p_j l_j(x_1) = f_1$$
$$\dots$$
$$\sum_{j=0}^{n} p_j l_j(x_n) = f_n$$

La matrice dei coefficienti è la matrice identica. Si ha $p_j = f_j$ e il polinomio interpolante risultante diventa:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j l_j(x).$$

Messo nella forma precedente il polinomio interpolante è detto polinomio di Lagrange.

Esempio 1

Consideriamo $n = 1$ (interpolazione lineare). In questo caso si ha

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$
$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Il polinomio interpolante è una retta passante per i due punti x_0 e x_1.

Esempio 2

Consideriamo $n = 2$ (interpolazione quadratica). In questo caso si ha

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$
$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$
$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Interpolazione di Newton

La formula di interpolazione di Lagrange è molto semplice nella forma, ma costosa se si vogliono aggiungere altri punti.
Le funzioni $l_i(x)$ dipendono da tutti i punti in cui si fa l'interpolazione. Se si vuol aggiungere un altro punto, tutte le funzioni di base cambiano.
Introduciamo un nuova base detta base di Newton

$$\begin{aligned}
&\phi_0(x) = 1, \\
&\phi_1(x) = (x - x_0), \\
&\vdots \\
&\phi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Ogni $p(x) \in P_n$ potrà scriversi nella forma:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x).$$

Imponendo le condizioni di interpolazione si ha:

$$\begin{aligned}
&a_0 = f_0,\\
&a_0 + a_1\phi_1(x_1) = f_1,\\
&a_0 + a_1\phi_1(x_2) + a_2\phi_2(x_2) = f_2,\\
&\vdots\\
&a_0 + a_1\phi_1(x_n) + \dots a_n\phi_n(x_n) = f_n.
\end{aligned}$$

Si ha quindi un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti è triangolare inferiore:

$$N = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
1 & \phi_1(x_1) & 0 & & 0\\
1 & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & & \ddots & 0\\
1 & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \dots & \phi_n(x_n)
\end{pmatrix}.$$

I coefficienti del polinomio si ottengono risolvendo il sistema:

$$N \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

La matrice è non singolare e quindi i coefficienti sono unici.

I coefficienti a_i dipendono dai valori di
$f_0, f_1, \ldots, f_{i-1}$ e $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}$.
Indichiamo la dipendenza con

$$a_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i].$$

Il polinomio interpolante assume la forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

e viene chiamato polinomio di interpolazione di Newton.

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$$

vengono chiamate differenze divise.
Il sistema triangolare può essere risolto in $O(n^2)$ operazione per calcolare i coefficienti dell'interpolante di Newton. Sfortunatamente i coefficienti di questo sistema possono creare facilmente problemi di overflow e di underflow.

Deriviamo un algoritmo diverso, ma molto più stabile, utilizzando le differenze divise.
Dalla prima equazione del sistema si ricava che:

$$a_0 \equiv f[x_0] = f_0,$$

e dalla seconda

$$a_1 \equiv f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

Questa espressione è un caso speciale di una relazione più generale:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Per dimostrare questa relazione poniamo: p il polinomio interpolante

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_k, f_k)$$

q il polinomio interpolante

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_{k-1}, f_{k-1})$$

r il polinomio interpolante

$$(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_k, f_k)$$

I coefficienti del termine di grado massimo per questi polinomi sono:
per p : $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$
per q : $f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]$
per r : $f[x_1, x_2, \dots, x_k]$

Ora dimostriamo che

$$p(x) = q(x) + \frac{x - x_0}{x_k - x_0}(r(x) - q(x))$$

Per mostrare questo calcoliamo

$$q(x) + \frac{x - x_0}{x_i - x_0}(r(x) - q(x))$$

in x_i e proviamo che $p(x_i) = f_i$ per $i = 1, n$.
Il risultato segue dall'unicità del polinomio interpolante.
Per $x = x_0$

$$q(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_k - x_0}(r(x_0) - q(x_0)) = f_0$$

poichè q interpola (x_0, f_0).
Per $x = x_i$ $(i = 1, \ldots, k - 1)$

$$q(x_i) + \frac{x_i - x_0}{x_k - x_0}(r(x_i) - q(x_i)) = f_i + \frac{x_i - x_0}{x_k - x_0}(f_i - f_i) = f_i$$

Per $x = x_k$

$$q(x_k) + \frac{x_k - x_0}{x_k - x_0}(r(x_k) - q(x_k)) = r(x_k) = f_k$$

Segue che il coefficiente di x^k in p è :

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Quello che volevamo dimostrare.
Questa proprietà viene usata per ricavare ricorsivamente le differenze divise, in alternativa all'inversione della matrice N. Si procede secondo lo schema seguente:

$$
\begin{array}{lllll}
f_0 & & & & \\
f_1 & f[x_0, x_1] & & & \\
f_2 & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\
f_n & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \dots & f[x_0, \dots, x_n]
\end{array}
$$

La matrice matrice può essere costruita per colonne. Gli elementi diagonali sono i coefficienti del polinomio interpolante di Newton.

Nel caso in cui la funzione $f(x)$ sia derivabile nei nodi, allora le differenze divise sono definite anche se due argomenti coincidono. Infatti si ha, ad esempio:

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Il precedente risultato si può generalizzare arrivando alla conclusione che Se la funzione $f(x)$ è derivabile n volte in un punto x, allora:

$$f[\underbrace{x, x, \dots, x}_{n+1}] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

Se la funzione f è derivabile m volte con derivata $m.ma$ continua, allora esiste un punto ξ appartenente al più piccolo segmento contenente i punti $x_0, x_1, \dots, x_m$ tale che:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

Esempio

Calcoliamo la tabella delle differenze divise relativa alla funzione $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ nei punti $x_i = i - 2$, per $i = 0, 1, \dots, 4$.

-2	-3			
-1	-5	-2		
0	-3	2	2	
1	3	6	2	0
2	13	10	2	0

Si ha che $\forall i \;\; f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = 2$
mentre $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = 0$.
Le diagonali della tabella rappresentano i coefficienti delle seguenti diverse espressioni (in quanto utilizzano nodi diversi) del polinomio $f(x)$, ottenute mediante la base di Newton:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \\
&= f[-2] + f[-2,-1](x+2) + f[-2,-1,0](x+2)(x+1) \\
&= -3 - 2(x+2) + 2(x+2)(x+1) \\
&= f[-1] + f[-1,0](x+1) + f[-1,0,1](x+1)(x-0) \\
&= -5 + 2(x+1) + 2x(x+1) \\
&= f[0] + f[0,1](x-0) + f[0,1,2](x-0)(x+1) \\
&= -3 + 6x + 2x(x-1).
\end{aligned}
$$

Esempio

Calcoliamo la $\sqrt{11} = 3.3166$ utilizzando un polinomio di grado 2 ed uno di grado 4. Per ottenere i 2 polinomi occorrono rispettivamente 3 e 5 punti. Consideriamo i nodi $x_0 = 9$, $x_1 = 4$, $x_2 = 16$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 25$ di cui è nota la radice quadrata. Per calcolare i coefficienti di entrambi i polinomi è sufficiente costruire la seguente tabella della funzione $\sqrt{x}$:

9	3				
4	2	1/5			
16	4	1/6	-1/210		
1	1	1/5	-1/90	1/1260	
25	5	1/6	-1/270	1/2835	-1/36288

da cui risulta:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 3 + \tfrac{1}{5}(x-9) - \tfrac{1}{210}(x-4)(x-9), \\ p_4(x) &= p_2(x) + \\ &\quad \left(\tfrac{1}{1260} - \tfrac{1}{36288}(x-1)\right)(x-16)(x-4)(x-9). \end{aligned}$$

Le approssimazioni ottenute sono: $p_2(11) = 3.333$ e $p_4(11) = 3.297$.

Interpolazione di Hermite

L'interpolazione di Hermite cerca di costruire un polinomio Interpolante tale che: dati $(x_0, f_0, f_0'), (x_1, f_1, f_1'), \ldots, (x_n, f_n, f'n)$ verifichi le seguenti condizioni di Interpolazione:

$$p(x_i) = f_i, \qquad i = 0, n \qquad p'(x_i) = f_i' \qquad i = 0, n$$

Teorema

Dati $n+1$ nodi $x_i, 0 \leq i \leq n$ e $2*n+2$ valori, f_i e f_i', $0 \leq i \leq n$ se i nodi sono distinti allora esiste un unico polinomio di grado minore o uguale a $2n+1$ tale che:

$$p(x_i) = f_i, \qquad p'(x_i) = f_i'$$

Esempio:Costruzione del polinomio di Hermite usando la base di Newton

Consideriamo i nodi x_0 e x_1 e i valori f_0, f_0', f_1, f_1'. Costruiamo la tabella delle differenza divise con nodi coincidenti

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_0 & f_0 & & & \\
x_0 & f_0 & f[x_0,x_0] = f_0' & & \\
x_1 & f_1 & f[x_0,x_1] & f[x_0,x_0,x_1] & \\
x_1 & f_1 & f_[x_1,x_1] = f_1' & f[x_0,x_1,x_1] & f[x_0,x_0,x_1,x_1]
\end{array}
$$

Il polinomio di Hermite di terzo grado è:

$$p(x) = f_0 + f_0'(x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2 + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)$$

Errore nella interpolazione

Finora abbiamo trattato le ordinate f_i come numeri arbitrari. Possiamo cambiare il punto di vista e assumere che $f_i = f(x_i)$, con f una funzione sufficientemente regolare.
Sia p il polinomio interpolante la f nei nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
Cerchiamo un'espressione per l'errore

$$e(t) = f(t) - p(t)$$

con t diverso dai nodi.
Sia $q(u)$ il polinomio di grado $n+1$ che interpola i nodi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e $x_{n+1} = t$. La forma di Newton per $q(u)$ è:

$$q(u) = \sum_{i=0}^{n+1} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (u - x_j)$$

$$q(u) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (u - x_j) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \prod_{j=0}^{n} (u - x_j)$$

Quindi

$$q(u) = p(u) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t]\omega(u)$$

con

$$\omega(u) = \prod_{j=0}^{n} (u - x_j)$$

Per costruzione $q(t) = f(t)$, qundi:

$$f(t) = p(t) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t]\omega(t)$$

o

$$e(t) = f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t]\omega(t)$$

Consideriamo adesso la funzione

$$r(u) = f(u) - p(u) - f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t]\omega(u)$$

con t fissato e u variabile. Poichè $p(x_i) = f(x_i)$ e $\omega(x_i) = 0$

$$r(x_i) = f(x_i) - p(x_i) - f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t]\omega(x_i) = 0$$

inoltre

$$r(t) = f(t) - p(t) - f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t]\omega(t) = 0$$

Se I è il più piccolo intervallo contenente $x_o, x_1, \ldots, x_n, t$ allora $r(u)$ ha almeno $n+2$ zeri in I Per il Teorema di Rolle, fra ognuno di questi zeri vi è uno zero di $r'(u)$ $r'(u)$ ha almeno $n+1$ zeri in I e $r''(u)$ ha almeno n zeri in I Continuando troviamo che $r^{(n+1)}(u)$ ha almeno 1 zero in I

Sia ξ un zero di $r^{(n+1)}(u)$ in I. Allora poichè $p(u)$ è un polinomio di grado n, $p^{(n+1)}(u) = 0$, inoltre $\omega^{(n+1)}(u) = (n+1)!$, quindi

$$0 = r^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - f[x_0, \dots .x_n, t](n+1)!$$

o

$$f[x_0, \dots .x_n, t] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Quindi se p è il polinomio interpolante le f nei nodi $x_0, \dots, x_n$

$$e(x) = f(x) - p(x) = \omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Mentre il secondo termine dipende dalla funzione f e dalla sua regolarità, il primo termine dipende esclusivamente dalla scelta dei punti in cui si esegue l'interpolazione. Supponiamo che i punti siano tutti contenuti nell'intervallo $[a, b]$. Non è restrittivo supporre che $[a, b]$ sia $[-1, 1]$. In caso contrario possiamo usare la trasformazione $t = \frac{2x-b-a}{b-a}$. Poniamo ora:

$$\|f\|_\infty = \max_{-1<x<1} |f(x)|.$$

$\|\cdot\|_\infty$ è una norma e quindi soddisfa alle proprietà già viste per le norme di vettori, cioè:

N1) $\|f\|_\infty = 0$ se e solo se $f(x) = 0$,

N2) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$,

N3) $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Si ha

$$\|e\|_\infty \leq \|\omega\|_\infty \|f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\|_\infty.$$

Si può dimostrare che esiste una scelta dei punti di interpolazione che minimizza la norma $\|\omega\|_\infty$. Tale scelta richiede di prendere i seguenti nodi in $[-1, 1]$:

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

o in $[a, b]$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Questi nodi sono detti nodi di Chebyshev. Quando i nodi da scegliere non sono fissati a priori, conviene prendere questi ultimi. Nell'esempio seguente la stessa funzione è interpolata su nodi equidistanti e su quelli di Chebyshev. Il polinomio interpolante con nodi equidistanti presenti oscillazioni molto più ampie, specialmente vicino agli estremi dell'intervallo, rispetto al polinomio ottenuto con i nodi di Chebyshev.

Esaminiamo la reazione del polinomio di interpolazione $p(x)$ alla presenza di perturbazioni nelle ordinate f_j. Siano $f_j + \delta_j$ i valori perturbati e definiamo

$$\hat{p}(x) = p(x) + \delta p(x) = \sum_{j=0}^{n} (f_j + \delta_j) L_j(x)$$

L'errore soddisfa

$$\hat{p}(x) - p(x) = \delta p(x) = \sum_{j=0}^{n} (\delta_j) L_j(x)$$

e

$$|\hat{p}(x) - p(x)| \leq (\sum_{j=0}^{n} |L_j(x)|) \max_{0 \leq j \leq n} |\delta_j|.$$

Definite $\lambda(x) = \sum_{j=0}^{n} |L_j(x)|$ la funzione di Lebesgue e $\Lambda_n = \|\lambda(x)\|_\infty$ la costante di Lebesgue, si ha

$$|\hat{p}(x) - p(x)| \leq \lambda(x) \max_{0 \leq j \leq n} |\delta_j|$$

e

$$\|\hat{p}(x) - p(x)\|_\infty \leq \Lambda_n \|\delta\|_\infty$$

con $\delta = (\delta_0, \dots, \delta_n)^T$.
Dividento per $\|p(x)\|_\infty \geq \|\mathbf{f}\|_\infty$ si ha

$$\frac{\|\hat{p}(x) - p(x)\|_\infty}{\|p(x)\|_\infty} \leq \Lambda_n \frac{\|\delta\|_\infty}{\|\mathbf{f}\|_\infty}$$

con $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_n)^T$.
La costante di Lebesgue associata ai nodi $x_0, \dots, x_n$ e all'intervallo $[a, b]$ rappresenta una maggiorazione del coefficiente di amplificazione degli errori nei dati sul risultato $p(x)$.

Spline

L'interpolazione polinomiale presenta degli aspetti negativi quando i nodi sono molti. I polinomi, essendo di grado elevato, presentano delle forti oscillazioni tra un nodo e l'altro. Supponiamo che i nodi $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ siano contenuti in un intervallo $[a, b]$. Sia $d \geq 1$. Definiamo *funzione spline* di ordine d una funzione $S_d(x)$ tale che:

1. $S_d(x)$ è un polinomio di grado d in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, per $i = 1, 2, \dots, n$;
2. $S_d^{(k)}(x)$, per $k = 0, 1, \dots, d-1$ è continua in $[a, b]$.

La derivata S_d' è una funzione spline di ordine $d-1$ e l'integrale è una funzione spline di ordine $d+1$.

Spline lineare

Se costruiamo la spline interpolante $S_1(x)$ date le coppie $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$, in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, la spline è definita da

$$S_1(x) = \frac{(x_{i+1} - x)f_i + (x - x_i)f_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$$

quando $f_i = f(x_i)$ con f continua con derivata prima e seconda continua, dalla formula per l'errore dell'interpolazione

$$\|S_1(x) - f(x)\|_\infty \leq \|(x - x_i)(x - x_{i+1})\|_\infty \frac{\|f''(x)\|_\infty}{2}$$

quindi se $h = \max_i(x_{i+1} - x_i)$ si ha

$$\|S_1(x) - f(x)\|_\infty \leq O(h^2)$$