Algoritmi per la soluzione di sistemi lineari

Corso di Calcolo Numerico,   a.a. 2005/2006

Francesca Mazzia

Dipartimento di Matematica
Università di Bari

31 Marzo 2009

Sistemi triangolari inferiori

Sia L triangolare inferiore. La matrice è non singolare se gli elementi principali $l_{i,i} \neq 0$, per $i = 1, \cdots, n$.
Il sistema $Lx = b$ può scriversi:

$$\begin{array}{ll}
l_{1,1}x_1 & = b_1 \\
l_{2,1}x_1 + l_{2,2}x_2 & = b_2 \\
l_{3,1}x_1 + l_{3,2}x_2 + l_{3,3}x_3 & = b_3 \\
\dots & \\
\dots & \\
l_{n,1}x_1 + l_{n,2}x_2 - \cdots + l_{n,n}x_n & = b_n
\end{array}$$

da cui si ottiene:

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{1,1}}, \qquad x_2 = \frac{b_2 - l_{2,1}x_1}{l_{2,2}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - l_{3,1}x_1 - l_{3,2}x_2}{l_{3,3}}$$

in generale

$$x_i = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} x_j}{l_{i,i}} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Essendo $l_{i,i} \neq 0$ queste formule determinano in modo univoco x_i.
La procedura descritta si chiama algoritmo di sostituzione in avanti, ed è descritta dalla seguente function s=Scilab:

```
function b = soll(L,b)
n = length(b);
b(1) = b(1)/L(1,1);
for i=2:n
  b(i) = (b(i) - L(i,1:i-1)*b(1:i-1))/L(i,i);
end
endfunction
```

L'istruzione `L(i,1:i-1)*b(1:i-1)` esegue il prodotto riga per colonne fra il vettore `L(i,1:i-1)` e il vettore `b(1:i-1)`.

`L(i,1:i-1)` elementi (`L(i,1)`, `L(i,2)`, $\cdots$, `L(i,i-1)`)

`b(1:i-1)` elementi (`b(1)`, `b(2)`, $\cdots$, `b(i-1)`)

Costo computazionale:
moltiplicazioni :
`L(i,1:i-1)*b(1:i-1)` richiede i-1 moltiplicazioni e viene eseguita per `i=2,n` sommando

$$\sum_{2}^{n}(i-1) = \sum_{1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Il numero di addizioni è dello stesso tipo.

Sistemi triangolari superiori

Sia U una matrice triangolare superiore. La matrice è non singolare se gli elementi principali $u_{i,i} \neq 0$, per $i = 1, \cdots, n$.

$$\begin{aligned}
u_{1,1}x_1 + u_{1,2}x_2 + \cdots + u_{1,n}x_n &= b_1 \\
u_{2,2}x_2 + \cdots + u_{2,n}x_n &= b_2 \\
\cdots & \\
\cdots & \\
u_{n,n}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

La soluzione di questo sistema è:

$$x_n = \frac{b_n}{u_{n,n}}, \qquad x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - u_{n-2,n-1}x_{n-1} - u_{n-2,n}x_n}{u_{n-2,n-2}}$$

In generale:

$$x_i = \frac{1}{u_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j} x_j \right) \qquad i = n, n-1, \ldots, 1$$

La procedura descritta si chiama algoritmo di sostituzione all'indietro, in cilabS è descritta dalla function:

```
function b = solu(U,b)
n = length(b);
b(n) = b(n)/U(n,n);
for i=n-1:-1:1
  b(i) = (b(i) - U(i,i+1:n)*b(i+1:n))/U(i,i);
end
endfunction
```

Proprietà delle matrici triangolari

- L'inversa di $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ è:

  $\mathrm{diag}(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \ldots, d_n^{-1})$
- Il prodotto di matrici diagonali è una matrice dello stesso tipo.
- L'inversa di una matrice triangolare superiore (inferiore) è una matrice dello stesso tipo.
- Il prodotto di matrici triangolari superiori (inferiori) è una matrice dello stesso tipo.

Matrici di permutazione

$P_{r,s}$ matrice di permutazione elementare di dimensione n. $P_{r,s}$ si otteniene dalla matrice I di dimensione $n \times n$ scambiando la r.ma riga con la s.ma.

$$
P_{r,s} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & r & & & & s & & & \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & & & & & & & & & \\
0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \\
 & \ddots & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & 0 & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & \ddots & \\
 & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \\ s \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Determinante

Consideriamo l'insieme delle *matrici quadrate* di dimensioni $n \times n$. Ad ogni matrice di questo insieme associamo un numero che indicheremo con $\det(A)$ tale che:

1) Se A è una matrice triangolare (superiore od inferiore), allora det(A) è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale.
2) Se A e B sono due matrici dell'insieme, allora:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3) $\det(P_{r,s}) = -1$.

Proprietà del determinante

P1) Se la matrice A ha due righe (o due colonne) uguali, il determinante è nullo. Infatti, detti r ed s gli indici delle due righe (o colonne) uguali, si avrà $A = P_{r,s}A$ (oppure $A = AP_{r,s}$) e quindi $\det(A) = \det(P_{r,s})\det(A) = -\det(A)$, da cui segue che $\det(A) = 0$.

P2) Sia α uno scalare, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$. Infatti:

$$\det(\alpha A) = \det(\alpha I A) = \det(\alpha I)\det(A).$$

Proprietà del determinante

P3) Se si moltiplicano tutti gli elementi di una righa o di una colonna per uno stesso numero α, il determinante della matrice risultante è uguale ad α per il determinante della matrice di partenza. Infatti, supponendo per semplicità che sia stata la prima riga ad essere moltiplicata per α, la matrice risultante sarà:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \dots & \alpha a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

e quindi $\det(A) = \alpha \det(A)$. Segue anche come corollario che il determinante di una matrice che ha una riga (o una colonna) nulla è uguale a zero.

Proprietà del determinante

P4) Se una riga di una matrice è una combinazione lineare delle altre, allora il determinante è nullo. Infatti sia per esempio A^T_{j*} la riga combinazione delle righe che la precedono, cioè che si abbia:

$$\alpha_1 A^T_{1*} + \alpha_2 A^T_{2*} + +\alpha_{j-1} A^T_{j-1,*} = A^T_{j*}.$$

Moltiplicando a sinistra A per la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{j-1} & -1 & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proprietà del determinante

P4) si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

con la riga $j-$ma nulla e quindi con determinante uguale a zero. Da ciò segue che $\det(A)=0$.

P5) Se la matrice A è non singolare allora il $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Riassumendo se una riga (o colonna) è una combinazione lineare delle altre allora il determinante è nullo.

Proprietà delle matrici di permutazione

Siano P, P_1, P_2 matrici di permutazione $n \times n$ e A una matrice $n \times n$ allora:

1. PA è come A con le righe permutate.
2. AP è come A con le colonne permutate
3. $P^{-1} = P^T$
4. $\det(P) = \pm 1$
5. $P_1 P_2$ è un matrice di permutazione.

Esempio

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

allora

$$P_{2,4}A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$AP_{2,4} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

Fattorizzazione LU

La fattorizzazione della matrice A nel prodotto di due matrici triangolari L e U (L triangolare inferiore e U triangolare superiore) ed eventualmente di una matrice di permutazione è uno degli algoritmi più usati per risolvere sistemi lineari con matrici dei coefficienti che hanno la maggior parte degli elementi non nulli.

La fattorizzazione cerca di modificare il problema orginale, in sottoproblemi più semplici da risolvere.

Sappiamo risolvere sistemi lineari con matrice dei coefficienti triangolare, superiore o inferiore. Sappiamo anche risolvere sistemi lineari con matrice dei coefficienti una matrice di permutazione.

La fattorizzazione LU mi permette di utilizzare queste competenze per risolvere sistemi lineari con matrice dei coefficienti A generica.

Fattorizzazione LU con permutazioni

Teorema

Se A è non singolare, allora esistono due matrici di permutazione P e Q una matrice triangolare inferiore L con elementi diagonali uguali a uno e una matrice triangolare superiore U tali che $PAQ = LU$. Solo una fra P e Q è necessaria.

Dimostrazione - passo I

La dimostrazione è per induzione. Per matrici di ordine 1 basta scegliere: $P = Q = L = 1$ e $U = A$.
Supponiamo sia vero per matrici di ordine $n - 1$ e sia A di ordine n.
Essendo A non singolare, allora ha sicuramente un elemento diverso da zero.
Scegliamo P' e Q' matrici di permutazione in modo da rendere l'elemento in posizione (1,1) di $P'AQ'$ diverso da zero.
Determiniamo due matrici triangolari inferiori e superiori a blocchi, L' e U', in modo tale che $P'AQ' = L'U'$.

$$P'AQ' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

con $A_{2,2}$ e $\tilde{A}_{2,2}$ di ordine $n-1$,

$$L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L_{2,1} & I \end{pmatrix}, \qquad U' = \begin{pmatrix} u_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & \tilde{A}_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} u_{1,1} & U_{1,2} \\ L_{2,1}u_{1,1} & L_{2,1}U_{1,2} + \tilde{A}_{2,2} \end{pmatrix}$$

per avere l'uguaglianza i blocchi di $L'U'$ devono essere uguali ai blocchi di $P'AQ'$ e quindi:
$u_{1,1} = a_{1,1} \neq 0$
$U_{1,2} = A_{1,2}$
$L_{2,1} = A_{2,1}/a_{1,1}$
$\tilde{A}_{2,2} = A_{2,2} - L_{2,1}U_{1,2}$

Per poter applicare l'ipotesi di induzione alla sottomatrice $\tilde{A}_{2,2}$ dobbiamo provare che è non singolare.

Sappiamo che : $\det(P'_1AP'_2) = \pm\det(A) \neq 0$ Inoltre, essendo $P'AQ' = L'U'$ si ha che $\det(P'AQ') = 1 \cdot u_{1,1}\det(\tilde{A}_{2,2})$ quindi $\det(\tilde{A}_{2,2}) \neq 0$.

Dimostrazione - Passo II

Per induzione esistono due matrici di permutazione $\tilde{P}$ e$\tilde{Q}$ tali che $\tilde{P}\tilde{A}_{2,2}\tilde{Q} = \tilde{L}\tilde{U}$. Sostituendo si ha:

$$P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L_{2,1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & \tilde{P}^T\tilde{L}\tilde{U}\tilde{Q}^T \end{pmatrix}$$

quindi

$$P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L_{2,1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P}^T\tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & \tilde{U}\tilde{Q}^T \end{pmatrix}$$

moltiplicando le prime due matrici e mettendo in evidenza la matrice di permutazione si ottiene:

$$P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L_{2,1} & \tilde{P}^T\tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & U_{1,2}\tilde{Q} \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^T \end{pmatrix}$$

mettendo in evidenza la matrice di permutazione $\tilde{P}^T$ si ottiene

$$P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{P}L_{2,1} & \tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & U_{1,2}\tilde{Q} \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^T \end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned} PAQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{pmatrix} P'AQ' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{P}L_{2,1} & \tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & U_{1,2}\tilde{Q} \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Importanza delle permutazioni

Le matrici di permutazione sono necessarie non solo per l'esistenza della fattorizzazione per qualsiasi matrice A non singolare, ma anche per rendere l'algoritmo numericamente stabile.

È infatti possibile, come mostra il seguente Teorema, per alcune matrici A calcolare la fattorizzazione LU senza eseguire permutazioni.

Teorema

Le seguenti definizioni sono equivalenti:

1. *Esiste un'unica matrice triangolare L con elementi principali uguali ad 1 a un'unica matrice trangolare superiore U non singolare tale che* $A = LU$.
2. *Tutte le sottomatrici principali di A sono non singolari (La sottomatrice principale di A di ordine j è* $A(1:j, 1:j)$*).*

Problemi dell'algoritmo di fattorizzazione LU senza permutazioni

Non può essere eseguita su matrici come:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Problemi dell'algoritmo di fattorizzazione LU senza permutazioni

Presenta problemi di instabilità numerica:

$$\begin{cases} 10^{-17}x_1 + x_2 & = 1 \\ \quad\quad x_1 + x_2 & = 2 \end{cases}$$

Il problema è ben posto, ed ha come soluzione esatta $x \simeq (1,1)^T$.
Calcolando la fattorizzazione LU ed operando in virgola mobile in base 2 in doppia precisione, si ottengono i fattori L ed U seguenti:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{17} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 \\ 0 & -10^{17} \end{pmatrix}$$

il prodotto LU non è A bensì la matrice seguente

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

confrontando $\tilde{A}$ con A si vede che l' elemento a_{22} di A è stato cambiato, pertanto la soluzione numerica che è $\tilde{x} = (0,1)^T$ è totalmente sbagliata.

Numero di operazioni

1) Calcolo degli elementi di $L_{2,1}$. Questi sono $n-1$ al primo passo, $n-2$ al secondo, fino ad 1 all'ultimo. In totale abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \frac{n(n-1)}{2}$$

divisioni.

2) Calcolo della matrice $\tilde{A}_{2,2}$. Questa ha $(n-1)^2$ elementi al primo passo, $(n-2)^2$ al secondo passo fino ad 1 all'ultimo passo. In totale il numero degli elementi calcolati sono:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \sim \frac{n^3}{3}.$$

Riassumendo:

moltiplicazioni e divisioni:$\sim n^3/3$ sottrazioni: $\sim n^3/3$.

Pivot Parziale e Pivot Totale

La scelta delle matrici di permutazione permette quindi di aumentare le propri'tà di stabilità dell'algoritmo. Possiamo scegliere $Q = I$ e P in modo tale che $a_{1,1}$ sia il più grande elemento in valore assoluto nella colonna, il che implica che $L_{2,1} = A_{2,1}/a_{1,1}$ ha elementi limitati da 1 in valore assoluto. In generale al passo i della fattorizzazione, ordiniamo le righe da i a n in modo da portare l'elemento più grande in valore assoluto in posizione i, i. Questa tecnica si chiama fattorizzazione con Pivot Parziale.

Possiamo scegliere P e Q in modo tale che $a_{1,1}$ sia il più grande elemento in valore assoluto di tutta la matrice. In generale al passo i della fattorizzazione, ordiniamo le righe e le colonne da i a n in modo da portare l'elemento più grande in valore assoluto in posizione i, i. Questa tecnica si chiama fattorizzazione con Pivot Totale.

Esempio

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Il primo passaggio per costruire la fattorizzazione è determinare l'elemento pivotale. Utilizziamo la tecnica del pivot parziale, quindi ci determiniamo il massimo elemento nella prima colonna di A,che denotiamo con $A(:,1)$. Essendo

$$A(:,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

il massimo si trova in riga 1, quindi possiamo porre la matrice di permutazione uguale alla matrice identità ($P = I$).

Esempio - Passo II

Possiamo ora costruire le matrici L ed U, triangolare superiori e inferiori a blocchi in modo che $PA = LU$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L_{2,1} & I \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & \tilde{A}_{2,2} \end{pmatrix}$$

per calcolare le matrici L e U utilizziamo le seguenti formule:
$u_{1,1} = a_{1,1} \neq 0$
$U_{1,2} = A_{1,2}$
$L_{2,1} = A_{2,1}/a_{1,1}$
$\tilde{A}_{2,2} = A_{2,2} - L_{2,1}U_{1,2}$
avendo diviso in blocchi delle stesse dimensioni la matrice PA:

$$PA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

Esempio - Passo III

quindi $u_{1,1} = 4$, $U_{1,2} = (0 \; 1 \; 1 \;)$,

$$L_{2,1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} /4$$

e

$$\tilde{A}_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} (0 \; 1 \; 1 \;) = \begin{pmatrix} 1 & 9/4 & 1/4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

quindi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 9/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Possiamo eseguire il prodotto PA e verificare che è uguale a LU.

Esempio - Passo IV

Il procedimento va ripetuto sulla sottomatrice $\tilde{A}_{2,2}$. Calcoliamo l'elemento pivotale di $\tilde{A}_{2,2}$, la prima colonna di $\tilde{A}_{2,2}$ è costituita dagli elementi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

quindi il massimo elemento si trova in riga 3 della sottomatrice, che occupa le righe dalla 2 alla 4 della matrice U. Per portare l'elemento in positione pivotale dobbiamo scambiare la seconda riga con la quarta. Effettuiamo lo scambio sulla matrice U, che diventa:

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

aggiorniamo anche le matrici P e L.

Esempio - Passo V

La nuova matrice di permutazione P si ottiene dalla precedente scambiando la seconda e la quarta riga, quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La nuova matrice L si ottiene aggiornando il vettore $L_{2,1}$, tenendo conto delle permutazioni effettuate, quindi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio - Passo VI

Effettuati gli scambi possiamo proseguire eseguendo il primo passaggio della fattorizzazione sulla matrice $\tilde{A}_{2,2}$, gli elementi che calcoliamo possiamo scriverli nella sottomatrice di L, che denotiamo con $L(2:4,2:4)$ e nella sottomatrice di U che denotiamo con $U(2:4,2:4)$. Possiamo proseguire in questo modo perchè il Teorema di esistenza e unicità della fattorizzazione LU con pivot ci dice che la matrice L della fattorizzazione di A ha come blocco $L(2:4,2:4)$ proprio la matrice $\tilde{L}$ della fattorizzazione del sottoblocco $\tilde{A}_{2,2}$. Utilizzando le notazioni della dimostrazione del Teorema di esistenza e unicità della fattorizzazione LU con pivot, applicate adesso alla sottomatrice $\tilde{A}_{2,2}$ permutata, abbiamo che: $u_{1,1} = 2$, $U_{1,2} = (7/2 \ 1/2 \ )$,

$$L_{2,1} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) /2$$

e

$$\tilde{A}_{2,2} = \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 9/4 & 1/4 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \end{array} \right) (7/2 \ 1/2 \ ) = \left(\begin{array}{cc} 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 0 \end{array} \right)$$

quindi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo eseguire di nuovo il prodotto PA e verificare che è uguale a LU.

Esempio - Passo VII

Il procedimento va ripetuto sulla nuova sottomatrice $\tilde{A}_{2,2}$. Calcoliamo l'elemento pivotale di $\tilde{A}_{2,2}$, la prima colonna di $\tilde{A}_{2,2}$ è costituita dagli elementi

$$\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

quindi il massimo elemento si trova in riga 2 della sottomatrice, che occupa le righe dalla 3 alla 4 della matrice U.
Per portare l'elemento in posizione pivotale dobbiamo scambiare la terza riga con la quarta. Effettuiamo lo scambio sulla matrice U, che diventa:

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

aggiorniamo anche le matrici P e L.

La nuova matrice di permutazione P si ottiene dalla precedente scambiando la seconda e la quarta riga, quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La nuova matrice L si ottiene aggiornando i vettori $L_{2,1}$ calcolati nei passaggi precedenti, tenendo conto delle permutazioni effettuate, quindi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effettuati gli scambi possiamo proseguire eseguendo il primo passaggio della fattorizzazione sulla matrice $\tilde{A}_{2,2}$, gli elementi che calcoliamo possiamo scriverli nella sottomatrice di L, che denotiamo con $L(3:4,3:4)$ e nella sottomatrice di U che denotiamo con $U(3:4,3:4)$. Utilizzando le notazioni precedenti, applicate adesso alla nuova sottomatrice $\tilde{A}_{2,2}$ permutata, abbiamo che: $u_{1,1} = 1/2$, $U_{1,2} = (0)$,

$$L_{2,1} = \left(\; 1/4 \; \right) * 2$$

e

$$\tilde{A}_{2,2} = \left(\; -1/4 \; \right) - \left(\; 1/2 \; \right) \left(0 \; \right) = \left(\; -1/4 \; \right)$$

quindi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Essendo la matrice U triangolare superiore, il procedimento per calcolare la fattorizzazione termina.

Soluzione di sistemi lineari

Dato un sistema lineare $Ax = b$ i passaggi per risolvere il sistema lineare sono:

1. Fattorizzare A in modo che $PAQ = LU$ con
2. Moltiplicare la matrice A e il termine noto b per P ottenendo il sistema equivalente $PAx = Pb$, tale sistema è anche equivalente al sistema $PAQQ^T x = PB$ essendo $QQ^T = I$.
3. Essendo $PAQ = LU$ possiamo scrivere il sistema come $L(U(Q^T x) = Pb$.
4. Chiamare $Q^T x = z$ e $Uz = y$.
5. Risolvere il sistema con matrice dei coefficienti triangolare inferiore $Ly = Pb$.
6. Risolvere il sistema con matrice dei coefficienti triangolare superiore $Uz = y$ (il termine noto y è quello calcolato al passo precedente).
7. Calcolare $x = Qz$ (z è stata calcolata al passo precedente).
8. x è la soluzione del sistema lineare

Calcolo del determinante

Una altra applicazione importante della fattorizzazione LU è il calcolo del determinante di una matrice. Sappiamo infatti che $det(PAQ) = det(P)det(A)det(Q)$ e inoltre $det(LU) = det(L)det(U)$. Inoltre $det(L) = 1$, quindi

$$det(A) = det(U)/(det(P)det(Q)) = \pm det(U),$$

con il segno determinato dalle permutazioni effettuate.

Esempio

Calcoliamo il determinante della matrice che abbiamo fattorizzato nell'esempio precedente.

Abbiamo che $det(P) = 1$, $det(U) = 4 \cdot 2 \cdot 1/2 \cdot -1/4 = -1$ e quindi $det(A) = -1$.

Calcolo della matrice inversa

L'inversa di una matrice non singolare A è la matrice non singolare X che verifica la seguente proprietà $AX = XA = I$. La matrice inversa viene di solito denotata con A^{-1}. Utilizzando l'uguaglianza $AX = I$ e scrivendo X utilizzando le sue colonne $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si ottiene

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

con e_i l'i-sima colonna della matrice identità. L'uguaglianze deve essere verificata per ogni termine. Quindi la matrice X è l'inversa di A se le sue colonne sono soluzioni dei sistemi lineari

$$Ax_i = e_i, \qquad \text{per } i = 1, n.$$

I sistemi lineari possono essere risolti utilizzando la fattorizzazione LU con permutazioni.

Studio del condizionamento

Sia $Ax = b$ e $(A + \delta A)\hat{x} = b + \delta b$, $\hat{x} = x + \delta x$
Per studiare il comportamento di δx in funzione della perturbazione sui dati di input, utilizziamo il lemma seguente.

Lemma

Sia $\|\cdot\|$ una norma matriciale. Allora $\|B\| < 1$ implica che $I - B$ è invertibile e
$\|(I - B)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|B\|)$.

Troviamo una maggiorazione relativa per $\|\delta x\|$

$$(A+\delta A)(x+\delta x) - Ax = b + \delta b - b$$

$$\delta A x + (A+\delta A)\delta x = \delta b$$

$$(A+\delta A)\delta x = \delta b - \delta A x$$

$$(I + A^{-1}\delta A)\delta x = A^{-1}(\delta b - \delta A x)$$

Se $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$ possiamo applicare il lemma e

$$\delta x = (I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}(\delta b - \delta A x)$$

passando alle norme

$$\|\delta x\| \leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \|A^{-1}\| (\|\delta b\| + \|\delta A\| \|x\|)$$

$$\|\delta x\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \|A\| \left(\frac{\|\delta b\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta A\| \|x\|}{\|A\|} \right)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \|A\| \left(\frac{\|\delta b\|}{\|A\| \|x\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

La quantità $k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ è il numero di condizione della matrice A

Matrice di Hilbert

La matrice di Hilbert rappresenta un classico esempio di matrice *mal condizionata* che ha origine da modelli reali.

Gli elementi della matrice di Hilbert sono dati dalla espressione seguente:

$$a_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1, \ldots, n$$

n	$\kappa_2(A^{(n)})$	$\kappa_\infty(A^{(n)})$
2	1.505	27
3	$5.241\ 10^2$	$7.480\ 10^2$
4	$1.551\ 10^4$	$2.837\ 10^4$
5	$4.766\ 10^5$	$9.436\ 10^5$
6	$1.495\ 10^7$	$2.907\ 10^7$
7	$4.754\ 10^8$	$9.852\ 10^8$
8	$1.526\ 10^{10}$	$3.387\ 10^{10}$
9	$4.932\ 10^{11}$	$1.099\ 10^{12}$
10	$1.603\ 10^{13}$	$3.535\ 10^{13}$

Residuo

La quantità $r = A\hat{x} - b$ si chiama residuo, $r = 0$ se $\hat{x} = x$
Si consideri la matrice A e il vettore b definiti da:

$$A = \begin{bmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0.8642 \\ 0.1440 \end{bmatrix}.$$

La soluzione esatta del sistema $Ax = b$ è $x = [2, -2]^T$.
Sia $\hat{x} = [0.9911, -0.4870]^T$, e sia $r = A\hat{x} - b$, quindi $r = [-10^{-8}, 10^{-8}]^T$.
Questo valore di r fa intendere che $\hat{x}$ è una buona approssimazione della soluzione esatta anche se in realtà non lo è.
La matrice inversa di A è data da

$$A^{-1} = -10^{-8} \begin{bmatrix} 0.8648 & -0.1441 \\ -1.2969 & 0.2161 \end{bmatrix}$$

per cui $\kappa_\infty(A) = 3\ 10^8$, quindi A è mal condizionata.

Il residuo relativo non è una buona approssimazione dell'errore relativo quando la matrice è mal condizionata. Infatti, vale la disuguaglianza

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

che si ottiene considerando che

$$A\delta x = A\hat{x} - Ax = A\hat{x} - b$$

quindi

$$\delta x = A^{-1}r, \quad \text{e} \quad \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|r\|$$

quindi

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|}$$

e, essendo $\|A\|\|x\| \geq \|b\|$, si ottiene:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|r\|}{\|b\|}$$