Concetti Introduttivi

Corso di Calcolo Numerico, a.a. 2005/2006

Francesca Mazzia

Dipartimento di Matematica
Università di Bari

6 Marzo 2006

Errore

Se A è una quantità che vogliamo calcolare e A_h è un'approssimazione di A, allora l'errore commesso è la differenza fra i due valori:

errore

$$\text{errore} = A - A_h;$$

l'errore assoluto è il valore assoluto dell'errore:

errore assoluto

$$\text{errore assoluto} = |A - A_h|;$$

e l'errore relativo si ottiene normalizzando l'errore assoluto con il valore esatto, se $A \neq 0$:

errore relativo

$$\text{errore relativo} = \frac{|A - A_h|}{|A|}.$$

L'errore relativo è più significativo dell'errore assoluto. È ragionevole

Se conosciamo una maggiorazione dell'errore assoluto, cioè:

$$|A - A_h| < tol.$$

possiamo fare una stima del valore esatto:

$$A_h - tol \leq A \leq A_h + tol.$$

Se conosciamo una maggiorazione dell'errore relativo, cioè:

$$\frac{|A - A_h|}{|A|} < tol.$$

possiamo fare una stima del valore esatto:

$$\frac{A_h}{1 + tol} \leq A \leq \frac{A_h}{1 - tol}.$$

Se riteniamo accettabili approssimazioni in cui

$$\frac{|A - A_h|}{|A|} < 0.001,$$

allora siano $A = 123457$ e $A_h = 123500$, calcoliamo l'errore relativo:

$$\frac{43}{123457} = 0.00034,$$

e poichè l'errore è minore di 0.001, l'approssimazione è accettabile.

Siano invece $A = 341.5$ e $A_h = 300$, l'errore relativo è:

$$\frac{41.5}{341.5} = 0.121,$$

e quindi l'approssimazione non è accettabile.

Notazione: uguaglianza approssimata

Se due quantità sono approssimativamente uguali, useremo la notazione $\approx$ per indicare questa relazione.

Questa è una notazione ambigua. È vero che $0.99 \approx 1$? Forse si. È vero che $0.8 \approx 1$? Forse no. Sia h un parametro reale che tende a zero tale che $\lim_{h\to 0} A_h = A$ allora,

$$A_h \approx A$$

per ogni h "sufficientemente piccolo".

Sia n un parametro intero che tende all'infinito tale che $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ allora,

$$A_n \approx A$$

per ogni n "sufficientemente grande".

esempio

Un modo per scrivere la derivata prima di una funzione è

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Possiamo quindi concludere che per h sufficientemente piccolo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

L'uguaglianza approssimata verifica le proprietà transitiva, simmetrica e riflessiva:

$$\begin{aligned} A \approx B, B \approx C \quad &\to A \approx C \\ A \approx B \quad &\to B \approx A \\ &\ A \approx A \end{aligned}$$

Notazione: ordine asintotico

Un'altra notazione è la notazione dell"'O grande", conosciuta come **ordine asintotico**. Supponiamo di avere un valore y e una famiglia di valori che lo approssimano y_h, Se esiste una costante $C > 0$, indipendente da h, tale che:

$$|y - y_h| \leq C|\beta(h)|,$$

per h sufficientemente piccolo, allora diciamo che:

$$y = y_h + O(\beta(h)) \qquad \text{per } h \rightarrow 0,$$

cioè $y - y_h$ è dell'ordine di $\beta(h)$, $\beta(h)$ è una funzione del parametro h tale che $\lim_{h \rightarrow 0} \beta_h = 0$. Ci concentriamo sul modo in cui l'errore dipende dal parametro h e ignoriamo dettagli meno importanti come il valore di C.
L'utilizzo è analogo se abbiamo una successione x_n che approssima x per valori di n grandi:

$$|x - x_n| \leq C|\beta(n)|, \qquad x = x_n + O(\beta(h))$$

Teorema di Taylor

Teorema

Sia $f(x)$ *una funzione avente* $n+1$ *derivate continue su* $[a, b]$ *per qualche* $n \geq 0$*, e siano* x,$x_0 \in [a, b]$*. Allora*

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

con

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

e

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Inoltre esiste un punto ξ_x *tra* x *e* x_0 *tale che:*

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

esempio

Supponiamo di volere approssimare la derivata prima di una funzione. Sappiamo che:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_h(x_0)$$

per h sufficiantemente piccolo. Vogliamo calcolare come $f'_h(x_0)$ si avvicina a $f'(x_0)$. Usiamo il Teorema di Taylor, con $n = 2$, $x = x_0 + h$ per esprimere $f(x_0 + h)$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_h)$$

quindi

$$\begin{aligned} f'_h(x_0) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(\xi_h)-f(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) + h/2 f''(\xi_h) \\ &= f'(x_0) + O(h). \end{aligned}$$