ESERCIZI DI ANALISI NUMERICA DA SVOLGERE IN MATLAB o SCILAB

a.a. 2006/2007 appello di Novembre

1. La funzione $f_1(x_0, d) = sin(x_0 + h) - sin(x_0)$ può essere trasformata in una equivalente usando la formula trigonometrica

   $$sin(\phi) - sin(\psi) = 2cos((\phi + \psi)/2)sin((\phi - \psi)/2).$$

   In aritmetica esatta f_1 e f_2 hanno gli stessi valori fissati x_0 e h.

   a) Ricava $f_2(x_0, d)$

   b) Suggerisci una formula per evitare gli errori di cancellazione quando si calcola l'approssimazione della derivata di prima di $f(x) = sin(x)$ usando le differenze in avanti.

   c) Scrivi un programma Matlab che implementa la nuova formula e calcola una approssimazione di $f'(1.2)$ per $h = 10^{-20}, 10^{-19}, \ldots .1$, confronta i risultati ottenuti con quelli che si ottengono applicando le differenze in avanti direttamente alla funzione $sin(x)$.

2. Considera la funzione $f(x) = (x - 2)^9 = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512$

   (a) Scrivi uno script Matlab che valuta la funzione in 151 punti equidistanti nell'intervallo $[1.93, 2.08]$ usando due metodi:

   1) La regola di Horner applicata a $x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512$;

   2) Calcolando direttamente $(x - 2)^9$;

   fai il grafico del risultato in due figure distinte.

   (b) Spiega, scrivendo un breve paragrafo, la differenza fra i due grafici.

   (c) Supponi di volere applicare il metodo delle bisezioni per trovare la radice di questa funzione, utilizzando come intervallo iniziale $[1.95, 2.08]$ usando la regola di Horner per valutarla, e richiedendo un errore assoluto di 10^{-6}. Senza fare calcoli seleziona fra i seguenti il modo di comportarsi del metodo:

1) La routine termina con una radice α tale che $|\alpha - 2| \leq 10^{-6}$.

2) La routine termina con una radice α che non soddisfa $|\alpha - 2| \leq 10^{-6}$.

3) La routine non trova una radice.

Giustifica la risposta scrivendo un breve paragrafo.

3. Supponi di volere approssimare la funzione e^x nell'intervallo $[0, 1]$ usando l'interpolazione polinomiale con $x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1$. Sia $p_2(x)$ il polinomio interpolante.

   (a) Trova un limite superiore per l'errore
$$\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - p_2(x)|$$

   (b) Trova il polinomio interpolante usando la tua tecnica preferita.

   (c) Fai un grafico della funzione e^x e del polinomio sulla stessa figura;

   (d)Fai un grafico dell'errore $e(x) = e^x - p_2(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ usando una scala logaritmica e controllo se l'errore è sotto il limite trovato nella parte (a).