ESERCIZI DI ANALISI NUMERICA DA SVOLGERE IN MATLAB o SCILAB

a.a. 2006/2007

1. La funzione $f_1(x,d) = cos(x+d) - cos(x)$ può essere trasformata in una equivalente usando la formula trigonometrica

$$cos(\phi) - cos(\psi) = -2sin((\phi+\psi)/2)sin((\phi-\psi)/2).$$

   a) Deriva $f_2(x,d)$
   b) Scrivi uno script Matlab che calcola $g_1(x,d) = f_1(x,d)/d + sin(x)$ e $g_2(x,d) = f_2(x,d)/d + sin(x)$ per $x = 3$ e $d = 10^{-11}$.
   c) Spiega la differenza nei risultati.

2. Data la matrice di Hilbert di dimensione 10 (A=hilb(10)), costruire il vettore b in modo che la soluzione dl sistema lineare si il vettore $x = ones(10,1)$. Risolvere il sistema lineare, calcolare l'errore relativo e il residuo relativo, calcolare il numero di condizione in norma infinito e giustificare i risultati.

   Modificare il sistema lineare introducendo un errore casuale sulla matrice A con norma infinito della matrice errore minore di 1e-12. Risolvere il sistema lineare con lo stesso vettore b precedente, calcolare l'errore relativo e il residuo relativo in norma infinito e giustificare i risultati.

3. Data la funzione $f(x) = x^2 - 6x + 9$ fare il grafico del numero di condizione, che studia come cambia il valore della funzione al variare di x, utilizzando 500 punti nell'intervallo $[3-10^{-2}, 3-20*eps]$ e nell'intervallo $[3+20*eps, 3+10^{-2}]$ con eps la precisione di macchina. Commentare i risultati. Perchè nell'ultimo punto del primo intervallo e nel primo del secondo il numero di condizione "sembra" diminuire? Costruire un vettore chiamato dx che contenga 500 punti dell'intervallo $[-10^{-8}, 10^{-8}]$, calcolare $x = 3 + dx$ e fare il grafico della funzione $f(x)$ utilizzando l'istruzione $plot(dx, fx)$, con fx il vettore che contiene i valori di $f(x)$. Commentare i risultati. Supponendo di volere calcolare la radice di f(x), calcolare numericamente l'intervallo di indeterminazione della radice.

4. Data la seguente funzione:

   $f(x) := x^{1/3} \qquad \text{per } x \in [0, 10]$

   Verificare numericamente se il polinomio interpolante converge alla funzione data all'aumentare del numero di nodi costruendo il polinomio interpolante utilizzando n=10,20,40,80,160,320 nodi equidistanti e calcolando il massimo errore assoluto valutando la differenza fra $f(x)$ e $p(x)$ in 500 punti equidistanti. Memorizzare l'errore massimo calcolato in funzione di n e fare il grafico dell'errore. Confrontare fra di loro i vari metodi per calcolare il polinomio interpolante utilizzando tutte le basi studiate.

   Confrontare i risultati ottenuti con quelli che si ottengono utilizzando i nodi di Chebyschev. Come cambia la funzione di Lebesgue se si utilizzano i nodi di Chebyshev?

   Confrontare i risultati ottenuti con quelli che si ottengono con la spline lineare e la spline cubica interpolante gli stessi nodi.

5. Applica i metodi iterativi per trovare la radice di $f(x) = x^3 - 0.8$, per la quale la soluzione esatta è $\alpha = (0.8)^{1/3}$. Utilizza come punto iniziale per il metodo di Newton quello calcolato utilizzando il polinomio lineare interpolante la funzione $(1/a)^{1/3}$ nei punti $x_0 = 1/8, x_1 = 1$ e per il metodo delle secanti e delle bisezioni i due punti $x_0 = 1/8, x_1 = 1$. Commentare i risultati.