LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA E COMUNICAZIONE DIGITALE
CALCOLO NUMERICO
Primo esonero - 3 Maggio 2005 -

Traccia 1. Consideriamo i seguenti numeri di macchina $\pm\gamma_0.\gamma_1\gamma_2 10^{\pm e_0}$ (esempi di numeri di questo tipo sono: $+1.23 \cdot 10^{-1}$, $+9.34 \cdot 10^{+8}$):

- qual è il valore di realmin?
- qual è il valore di realmax?
- se usiamo l'arrotondamento qual è il valore della precisione di macchina?

Utilizzando i numeri di macchina appena definiti:

- calcolare la fattorizzazione LU senza permutazioni della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

- risolvere il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- calcolare il residuo;
- risolvere lo stesso sistema lineare utilizzando la fattorizzazione LU con pivot parziale;
- calcolare il residuo;
- spiegare i risultati ottenuti.

Svolgimento 1. Lavorando in base 10 le cifre della mantissa possono assumere i seguenti valori $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, poichè i numeri di macchina sono rappresentati utilizzando la notazione esponenziale normalizzata $\gamma_0 \neq 0$. L'esponente può assumere i valori $\pm 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

- Realmin è il più piccolo numero positivo rappresentabile. Realmin $= 1.00 \cdot 10^{-9}$
- Realmax è il più grande numero positivo rappresentabile.Realmax $= 9.99 \cdot 10^{9}$.
- Il valore della precisione di macchina è: $10^{-2}/2$.

Gli elementi della matrice A sono rappresentabili esattamente con i numeri di macchina definiti.

$$A = \begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^{-4} & 1.00 \cdot 10^{0} \\ 1.00 \cdot 10^{0} & 2.00 \cdot 10^{0} \end{pmatrix}$$

- Per eseguire la fattorizzazione LU utilizzando i numeri di macchina appena definiti, supponiamo di avere dei registri che permettono di memorizzare più cifre significative, in questo modo le operazioni corrispondono ad arrotondare il risultato ottenuto in aritmetica esatta dopo ogni operazione. L'elemento in posizione $2,1$ della matrice L si calcola come $fl(1.00 \cdot 10^0 / 1.00 \cdot 10^{-3}) = fl(1.00 \cdot 10^3) = 1.00 \cdot 10^3$ quindi
$$L = \begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^0 & 0 \\ 1.00 \cdot 10^3 & 1.00 \cdot 10^0 \end{pmatrix}$$
La prima riga di U è uguale alla prima riga di A, l'elemento in posizione $2,2$ di U si calcola come $fl(2.00 \cdot 10^0 - 1.00 \cdot 10^4) = fl(0.0002 \cdot 10^4 - 1.00 \cdot 10^4) = fl(-0.9998 \cdot 10^4) = -1.00 \cdot 10^4$ quindi
$$U = \begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^{-4} & 1.00 \cdot 10^0 \\ 0 & -1.00 \cdot 10^4 \end{pmatrix}$$

- Risolviamo il sistema lineare utilizzando la fattorizzazione appena calcolata. Risolviamo prima il sistema triangolare inferiore:
$$\begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^0 & 0 \\ 1.00 \cdot 10^4 & 1.00 \cdot 10^0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^0 \\ 3.00 \cdot 10^0 \end{pmatrix}$$
quindi $y_1 = 1.00 \cdot 10^0$ e $y_2 = fl(3.00 \cdot 10^0 - 1.00 \cdot 10^4) = fl(0.0003 \cdot 10^4 - 1.00 \cdot 10^4) = fl(-0.9997 \cdot 10^4) = -1.00 \cdot 10^4$ Adesso risolviamo il sistema triangolare superiore:
$$\begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^{-3} & 1.00 \cdot 10^0 \\ 0 & -1.00 \cdot 10^4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^0 \\ -1.00 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$
Quindi $x_2 = fl(-1.00 \cdot 10^3 / -1.00 \cdot 10^3) = 1.00 \cdot 10^0$ e $1.00 \cdot 10^{-4} x_1 = fl(1.00 \cdot 10^0 - 1.00 \cdot 10^0 x_2) = 0$ quindi $x_1 = 0$

- Calcoliamo il residuo:

  $r_1 = 1.00 \cdot 10^{-3} x_1 + 1.00 \cdot 10^0 x_2 - 1.00 \cdot 10^0 = 0$

  $r_2 = 1.00 \cdot 10^0 x_1 + 2.00 \cdot 10^0 x_2 - 3.00 \cdot 10^0 = -1.00 \cdot 10^0$

- Calcoliamo la fattorizzazione LU con pivot parziale. Il massimo elemento in prima colonna si trova in riga 2, quindi la matrice di permutazione
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1.00 \cdot 10^0 \\ 1.00 \cdot 10^0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$PA = \begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^0 & 2.00 \cdot 10^0 \\ 1.00 \cdot 10^{-4} & 1.00 \cdot 10^0 \end{pmatrix}$$
La matrice L è
$$L = \begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^0 & 0 \\ 1.00 \cdot 10^{-4} & 1.00 \cdot 10^0 \end{pmatrix}$$
La prima riga di U è uguale alla prima riga di PA l'elemento in posizione $2,2$ di U è dato da: $U_{2,2} = fl(1.00 \cdot 10^0 - fl(1.00 \cdot 10^{-4}) \cdot (2.00 \cdot 10^0)) = fl(1.00 \cdot 10^0 - fl(2.00 \cdot 10^{-4}) = fl(1.00 \cdot 10^0 - 2.00 \cdot 10^{-4}) = fl(1.00 \cdot 10^0 - 0.0002 \cdot 10^0) = fl(0.9998 \cdot 10^0) = 1.00 \cdot 10^0$ quindi:
$$U = \begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^0 & 2.00 \cdot 10^0 \\ 0 & 1.00 \cdot 10^0 \end{pmatrix}$$

- Risolviamo il sistema lineare triangolare inferiore, dopo avere permutato il termine noto con lam matrice P di permutazione:

$$\begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^0 & 0 \\ 1.00 \cdot 10^{-3} & 1.00 \cdot 10^0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 3.00 \cdot 10^0 \\ 1.00 \cdot 10^0 \end{pmatrix}$$

  $y_1 = 3.00 \cdot 10^0$, $y_2 = fl(1.00 \cdot 10^0 - fl(1.00 \cdot 10^{-4} y_1)) = fl(1.00 \cdot 10^0 - 1.00 \cdot 10^{-4}) = fl(1.00 \cdot 10^0 - 0.0001 \cdot 10^0) = fl(0.9999 \cdot 10^0) = 1.00 \cdot 10^0$

  Risolviamo il sistema triangolare superiore

$$\begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^0 & 2.00 \cdot 10^0 \\ 0 & 1.00 \cdot 10^0 \end{pmatrix} x = y$$

  $x_2 = 1.00 \cdot 10^0$ e $x_1 = fl(3.00 \cdot 10^0 - fl(2.00 \cdot 10^0 x_2)) = fl(3.00 \cdot 10^0 - 2.00 \cdot 10^0) = 1.00 \cdot 10^0$

- Il residuo è

  $r_1 = 1.00 \cdot 10^{-4} x_1 + 1.00 \cdot 10^0 x_2 - 1.00 \cdot 10^0 = 0$

  $r_2 = 1.00 \cdot 10^0 x_1 + 2.00 \cdot 10^0 x_2 - 3.00 \cdot 10^0 = 0$

  le operazioni per calcolare il residuo sono state tutte eseguite utilizzando l'aritmetica di macchina.

- Durante la costruzione della fattorizzazione LU senza pivot, l'elemento molto grande della matrice L ha generato dei problemi di cancellazione numerica che hanno fatto propagare gli errori di arrotondamento in modo da ottenere un risultato finale diverso da quello che ci aspettiamo. È l'algoritmo che è instabile, cambiando il metodo di risoluzione e utilizzando la fattorizzazioen con pivot parziale i risultati ottenuti sono molto più vicini a quelli reali, tenendo sempre in considerazione che stiamo lavorando in aritmetica di macchina.

Traccia 2. Sia

$$f(x) = x^2 - 1$$

calcolare il numero di condizione della funzione f in $x = 1.01$. Sia $\delta x = 0.01$, calcolare $f(x + \delta x)$ e verificare come l'errore relativo sul dato di input si propaga sul risultato.

Svolgimento 2. Il numero di condizione della funzione in $x = 1.01$ è dato da $|f'(1.01)1.01/f(1.01)| = 101.5025$. $f(x + 0.01) = f(1.02) = 0.0404$, l'errore relativo sul risultato è:

$$|(f(1.02) - f(1.01))/f(1.01)| = 1.0100$$

l'errore relativo sul dato di input è:

$$|(1.02 - 1.01)/1.01| = 0.0099$$

L'errore relativo sul risultato è circa uguale all'errore relativo sul dato di input moltiplicato con il numero di condizione.

Traccia 3. Si determini la fattorizzazione LU con pivot parziale della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/12 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/12 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- si calcoli il determinante di A;
- si calcoli la matrice inversa di A;
- si calcoli il numero di condizione in norma infinito di A.

Svolgimento 3. Per calcolare la fattorizzazione LU con pivot parziale della matrice, al primo passo calcoliamo l'elemento pivotale. In questo caso non abbiamo bisogno di fare permutazioni, quindi poniamo $P = I$ e calcoliamo le matrici L e U.

$$L_{2,1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} /(1/2)$$

La prima riga di U è uguale alla prima riga di A il blocco

$$\tilde{A}_{2,2} = \begin{pmatrix} 1/12 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/12 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1/12 \; 0 \; 0 \;) = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1/12 & 1/2 \end{pmatrix}$$

quindi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/12 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Il procedimento va ripetuto sulla nuova sottomatrice $\tilde{A}_{2,2}$. Calcoliamo l'elemento pivotale di $\tilde{A}_{2,2}$, la prima colonna di $\tilde{A}_{2,2}$ è costituita dagli elementi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi il massimo elemento si trova in riga 2 della sottomatrice, che occupa le righe dalla 2 alla 4 della matrice U. Per portare l'elemento in posizione pivotale dobbiamo scambiare la seconda riga con la terza. Effettuiamo lo scambio sulla matrice U, che diventa:

$$U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 & 1/2 \end{pmatrix}$$

aggiorniamo anche le matrici P e L. La nuova matrice di permutazione P si ottiene dalla precedente scambiando la seconda e la terza riga, quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La nuova matrice L si ottiene aggiornando i vettori $L_{2,1}$ calcolati nei passaggi precedenti, tenendo conto delle permutazioni effettuate, quindi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

poichè la matrice U ha già gli elementi al di sotto della diagonale principale uguale a zero possiamo eseguire direttamente l'ultimo passaggio lavorando sulla sottomatrice di dimensione 2. Non è necessario eseguire scambi. L'elemento $L_{2,1} = (1/12)/(3/4) = 1/9$, l'elemento $\tilde{A}_{2,2} = 1/2 - (1/9) * 0 = 1/2$, quindi la L e la U diventano:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- Il determinante di A è uguale a $det(L)det(U)/det(P) = -3/32$, essendo $det(P) = -1$, $det(L) = 1$ e $det(U) = (1/2)(1/2)(3/4)(1/2) = 3/32$.

- L'inversa della matrice A si calcola risolvendo i quattro sistemi lineari usando la fattorizzazione appena calcolata e avendo come termini noti i vettori colonna della matrice identità. Sia I la matrice identità, i quattro sistemi sono:

$$AX = I$$

  moltiplico per P

$$PAX = PI = P$$

  quindi risolviamo

$$Ly_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  ottenendo

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1/9 \end{pmatrix}$$

  e poi

$$Ux_1 = y_1$$

  ottenendo la prima colonna dell'inversa:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 46/27 \\ 16/9 \\ -4/3 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$

  Per calcolare la seconda colonna:

$$Ly_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  ottenendo

$$y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1/9 \end{pmatrix}$$

e poi

$$Ux_2 = y_2$$

ottenendo la seconda colonna dell'inversa

$$x_2 = \begin{pmatrix} 8/27 \\ -16/9 \\ 4/3 \\ -2/9 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la terza colonna:

$$Ly_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo

$$y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e poi

$$Ux_3 = y_3$$

ottenendo la terza colonna dell'inversa

$$x_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la quarta colonna:

$$Ly_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ottenendo

$$y_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e poi

$$Ux_4 = y_4$$

ottenendo la quarta colonna dell'inversa

$$x_4 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice inversa è:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 46/27 & 8/27 & -1/3 & 1/3 \\ 16/9 & -16/9 & 2 & -2 \\ -4/3 & 4/3 & 0 & 0 \\ 2/9 & -2/9 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Il numero di condizione di A in norma infinito è dato da $\|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$, Poichè $\|A\|_\infty = 7/4$ e $\|A^{-1}\|_\infty = 68/9$, il numero di condizione di A è $238/27$.