CALCOLO NUMERICO

Francesca Mazzia

Dipartimento Interuniversitario di Matematica

Università di Bari

3. Elementi di Algebra Lineare.

Sistemi lineari

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ di n

$Ax = b$ è un vettore di m componenti.

$$
\begin{array}{l}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
\ldots \\
\ldots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m
\end{array}
$$

Numero di operazioni per calcolare b:

mn moltiplicazioni

$m(n-1)$ addizioni.

Le matrici trasformano un vettore x di dimensione n in un vettore di dimensione m, cioè rappresentano delle trasformazioni tra due spazi.

Posso rappresentare una matrice utilizzando le sue colonne:

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Il prodotto $Ax = b$ può anche scriversi:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b$$

cioè il vettore b si ottiene come combinazione lineare dei vettori colonna della matrice A.

Non è sempre vero che fissato un vettore b di dimensione m, si possa sempre trovare un vettore x per cui $Ax = b$ sia soddisfatta.

È questo il problema della soluzione di sistemi lineari.

Se b è il vettore nullo, il sistema si dice omogeneo.

Partizionamento

Il partizionamento è una decomposizione della matrice in sottomatrici.

Esempio

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\
\hline
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57}
\end{array}\right)$$

Possiamo scrivere

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

con

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}$$

Se le partizioni sono compatibili possiamo trattare le sottomatrici come scalari nell'eseguire le operazioni tra matrici.

Per esempio:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Siano x e $y \in \mathbb{R}^n$ se $x^T y = 0$ i due vettori si dicono ortogonali.

$x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2$, quindi $x^T x > 0$.

Se $x^T x = 1$, il vettore x si dice unitario.

Se $a \in \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^n$, si ha:

$$W = ab^T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{pmatrix}.$$

La matrice W è una matrice di rango 1, cioè le sue colonne generano uno spazio di dimensione 1. Ogni matrice di rango uno può essere espressa nella forma ab^T. Le matrici di rango uno non vengono mai memorizzate esplicitamente, ma si utilizza sempre la loro rappresentazione con i vettori a e b.

Come eseguiamo il prodotto Wx ?

$c = Wx = (ab^T)x = a(b^T x) = (b^T x)a$

$b^T x$ è uno scalare quindi

calcoliamo prima

$$\mu = b^T x$$

e poi

$$c = \mu a$$

Numero di operazioni:

$2n$ moltiplicazioni

$n - 1$ addizioni.

Inversa di un matrice

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Se esiste una matrice $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

allora A^{-1} viene chiamata

inversa della matrice A.

Se l'inversa esiste, essa è unica.

Infatti sia B tale che $BA = AB = I$, allora:

$B = BI = BAA^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$.

Vale la seguente proprietà

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

infatti:

$(AB)B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}BA = I.$

Una matrice che non ammette l'inversa è detta singolare.

Se A è non singolare, lo è anche A^{-1}.

Infatti $(A^{-1})^{-1} = A$.

- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

- L'inversa di diag$(d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n)$ è:
$$\text{diag}(d_1^{-1},\ d_2^{-1},\ \ldots,\ d_n^{-1})$$

- L'inversa di una matrice triangolare superiore (inferiore) è una matrice dello stesso tipo.

- Il prodotto di matrici triangolari superiori (inferiori) è una matrice dello stesso tipo.

Dipendenza lineare di vettori

Dati r vettori $x_1, x_2, \ldots, x_r$, diversi dal vettore nullo,

se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r = 0$$

con gli $\alpha_i \neq 0$, i vettori si dicono linearmente dipendenti.

Se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r = 0$$

solo se $\alpha_i = 0$ per $i = 1, 2, \ldots, r$ allora i vettori x_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ sono linearmente indipendenti.

Se vi è un $\alpha_i \neq 0$, ve ne deve essere almeno un altro, e alcuni dei vettori x_i possono esprimersi come combinazione lineare degli altri.

Infatti se $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sono **l.d.** con $\alpha_r \neq 0$ si ha:

$$x_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r}x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_r}x_2 - \ldots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r}x_{r-1}.$$

Se i vettori x_i sono **l.i.**, un qualunque sottoinsieme di essi è ancora **l.i.**.

Un insieme di vettori tra loro ortogonali sono **l.i.**.

Una base è l'insieme minimo di vettori **l.i.**. che generano un insieme dato.

La base canonica di $\mathbb{R}^m$ è costituita dai vettori

$$e_1, e_2, \cdots, e_m$$

con elementi $(e_i)_j = 0$ per $i \neq j$ e $(e_i)_i = 1$.

Dato un insieme di vettori

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \qquad x_i \in \mathbb{R}^m$$

si dice rango dell'insieme il numero massimo di vettori linearmente indipendenti che è possibile estrarre dall'insieme.

Poichè il massimo numero di vettori **l.i.** in tutto $\mathbb{R}^m$ è m, il rango di un insieme di vettori di $\mathbb{R}^m$ non può superare m.

Data una matrice A, si dice rango della matrice, e si indica con rank(A), il rango dell'insieme dei suoi vettori colonna.

Consideriamo quindi le due matrici A ed

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix} = (A, b)$$

detta matrice ampliata, avente in comune con A le prime n colonne, mentre l'ultima colonna è il vettore b.

Si ha il seguente Teorema, noto come teorema di *Rouché-Capelli*:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema $Ax = b$ ammetta soluzioni è che il rango di A e quello di $\widehat{A}$ coincidano.

Se A è una matrice quadrata di ordine n allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1. Per ogni vettore $b \in \mathbb{R}^n$, il sistema $Ax = b$ ammette soluzione

2. Se una soluzione del sistema esiste essa è unica

3. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = 0$ implica $x = 0$

4. Le colonne (righe) di A sono linearmente indipendenti

5. La matrice A è invertibile

6. $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}),$$

L'ultima relazione può essere fuorviante, perchè il determinante cambia scalando la matrice. Infatti

$$\text{det}(\sigma A) = \sigma^n \text{det}(A)$$

Se $n = 30$ e $\text{det}(A) = 1$ allora

$$\text{det}(0.1A) = 10^{-30}$$

Non è facile verificare al calcolatore quando questa quantità è veramente 0.

Il calcolo del determinante con la regola di Laplace richiede più di $n!$ moltiplicazioni,

$n = 16$

il nostro computer esegue una moltiplicazione ogni 10^{-10} secondi

tempo di calcolo : 16!*1e-10/60 $\approx$ 35 minuti

Proprietà del determinante

1) Se A è una matrice triangolare (superiore od inferiore), allora det(A) è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale.

2) Se A e B sono due matrici dell'insieme, allora:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

3) $\det(P_{r,s}) = -1$.

Autovalori ed autovettori

Data una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, un numero complesso λ si dice autovalore di A se esiste un vettore $u \neq 0$ a componenti reali o complessi tale che:

$$Au = \lambda u,$$

o

$$(A - \lambda I)u = 0,$$

u si dice autovettore di A ed è soluzione non nulla di un sistema lineare omogeneo.

Tale soluzione esiste se $\det(A - \lambda I) = 0$. Si dimostra che $\det(A - \lambda I) = p(\lambda)$ è un polinomio di grado n in λ che ha n radici nel campo complesso (polinomio caratteristico).

Si dice raggio spettrale della matrice A, e lo si indica con $\rho(A)$, il massimo modulo degli autovalori di A.

Se u è un autovettore di A, anche αu, con $\alpha \neq 0$ è autovettore di A.

Gli autovettori unitari o normalizzati sono tali che $u^T u = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

autovalori di A: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, autovettori:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

autovettori normalizzati di A:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Norme vettoriali

Sia $x \in \mathbb{R}^n$, si chiama norma di x, e si indica con $\|x\|$, un numero non negativo che soddisfa le seguenti condizioni:

N1) se x è il vettore nullo, $\|x\| = 0$ e viceversa;

N2) se λ è uno scalare, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

N3) se x ed y sono due vettori, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare)

Dalla N3) segue che:

$$\|x - y\| \geq |\ \|x\| - \|y\|\ |$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$(x^T y)^2 \leq (x^T x)(y^T y)$$

Sia $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

Norma ∞

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Norma 1.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Norma 2.

$$\|x\|_2 = (x^T x)^{1/2}$$

.

Norme matriciali

Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, si chiama norma di A, e si indica con $\|A\|$, un numero non negativo che soddisfa le seguenti condizioni:

M1) $\|A\| = 0$ se e solo se A è la matrice nulla;

M2) Se λ è uno scalare allora $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$;

M3) Se B è una matrice avente le stesse dimensioni di A allora:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|;$$

M4) Se B è una matrice il cui numero di righe è uguale al numero di colonne di A, allora:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Norma matriciale indotta da una norma vettoriale

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Una norma matriciale è compatibile con una norma su vettori se dato $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Ay\| \leq \|A\|\|y\|.$$

Le norme matriciali indotte sono compatibili con le norme vettoriali.

Norma ∞

$$\|A\|_\infty = \max \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Norma 1

$$\|A\|_1 = \max \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|.$$

Norma 2

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$